§ 2. Топологические многообразия малых размерностей

В топологии многообразий проблема гомеоморфизма (см. § 6 гл. 1) является центральной. Здесь мы расскажем о ее решении в простейших случаях: опишем топологическую классификацию одномерных и компактных двумерных многообразий (или, иначе говоря, поверхностей). При этом достаточно ограничиться связными многообразиями.

Теорема 1. *Всякое связное одномерное многообразие без края гомеоморфно числовой прямой* $\mathbf{R}^1$ *или окружности* S^1. *Всякое связное одномерное многообразие с непустым краем гомеоморфно отрезку* $I = [0, 1]$ *или лучу* $\mathbf{R}^1_+ = [0, +\infty)$.

Эту теорему мы доказывать не будем. □

С другой стороны, ясно, что $S^1 \not\cong \mathbf{R}^1$ и $I \not\cong \mathbf{R}^1_+$, — пространства S^1 и I компактны, а $\mathbf{R}^1_+$ и $\mathbf{R}^1$ — нет.

Ручки, трубки, пленки. Для описания возможных топологических типов замкнутых двумерных многообразий нам понадобятся термины «ручка», «трубка»

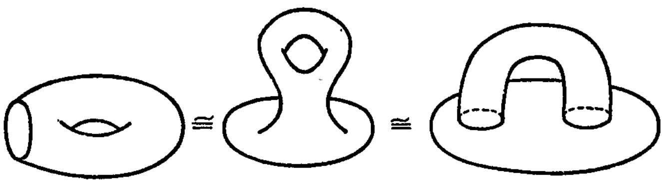


Рис. 28

и «пленка». *Ручкой* будем называть часть двумерного многообразия, гомеоморфную тору с дыркой (рис. 28). *Трубкой* будем называть часть двумерного многообразия, гомеоморфную кольцу (кругу с дыркой). (Название это связано с тем, что трубка гомеоморфна боковой поверхности прямого кругового цилиндра). *Пленкой* будем называть часть двумерного многообразия, гомеоморфную листу Мёбиуса (рис. 29).

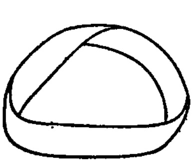


Рис. 29

Ориентируемость. Назовем двумерное многообразие *неориентируемым*, если оно содержит хотя бы одну пленку, и *ориентируемым* в противном случае.

Сферы с дырами. Напомним, что *сферой с n дырами* называется дополнение в сфере внутренности n попарно непересекающихся кругов. Сфера с одной дырой гомеоморфна кругу, сфера с двумя дырами гомеоморфна кольцу. Сфера с n дырами гомеоморфна кругу с $n-1$ дырами (рис. 30). *Все сферы с n дырами гомеоморфны.* (Упражнение.)

Сферы с ручками. Замкнутое двумерное многообразие называется *сферой с p ручками*, если в нем можно выделить p попарно непересекающихся ручек, замыкание дополнения к которым гомеоморфно сфере

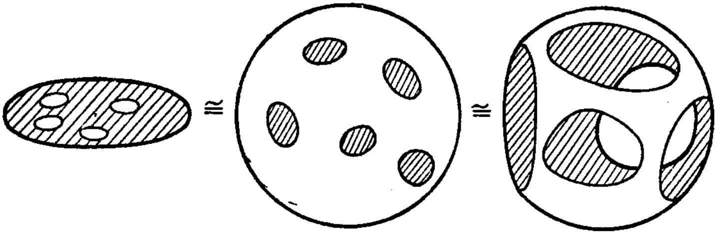


Рис. 30

с p дырами (рис. 31). Оказывается, все сферы с ручками ориентируемы. (Этого мы доказывать не будем.)

Все сферы с p ручками гомеоморфны. Вот другое их описание: *ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере с p ручками, если в нем можно*

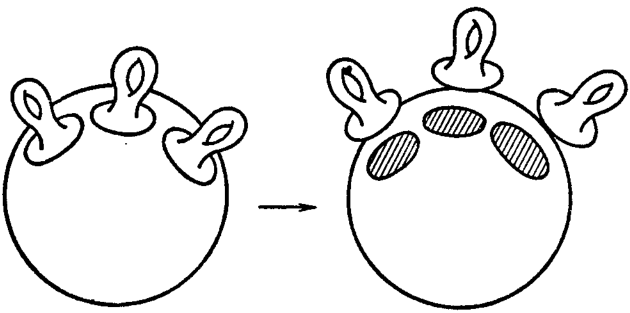


Рис. 31

выделить p попарно непересекающихся трубок, замыкание дополнения к которым гомеоморфно сфере с $2p$ дырами (рис. 32).

Примеры. 1. Тор гомеоморфен сфере с одной ручкой (рис. 33).

2. Крендель гомеоморфен сфере с двумя ручками (рис. 34).

3. Еще одна стандартная поверхность, гомеоморфная сфере с p ручками ($p = 4$), изображена на рис. 35 и 36.

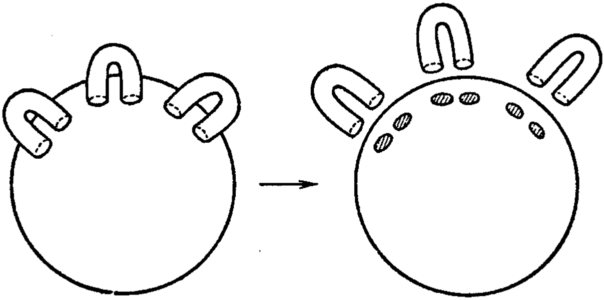


Рис. 32

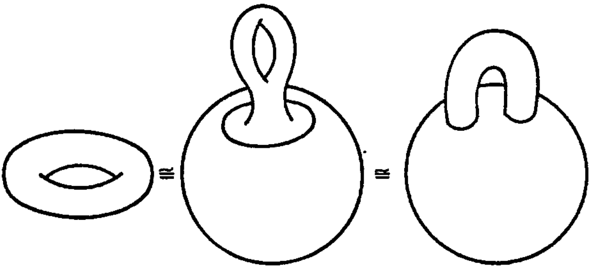


Рис. 33

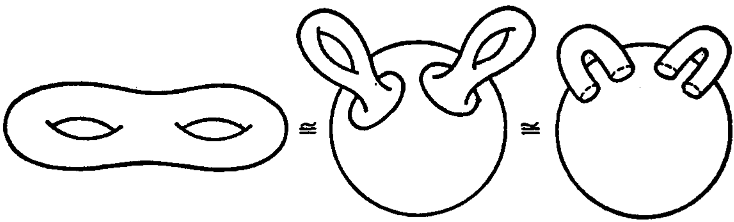


Рис. 34

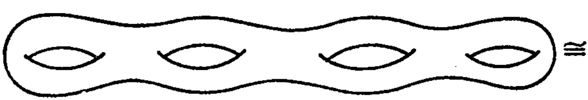


Рис. 35

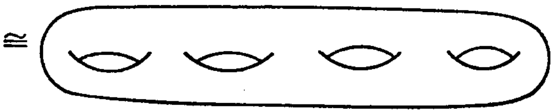


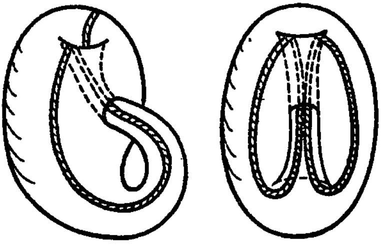
Рис. 36

Оказывается, что *всякая замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с несколькими ручками.* Доказательство этого факта мы отложим до § 4.

Сферы с пленками. Замкнутое двумерное многообразие называется *сферой с q пленками*, если в нем можно выделить q попарно непересекающихся пленок, замыкание дополнения к которым гомеоморфно сфере с q дырами.

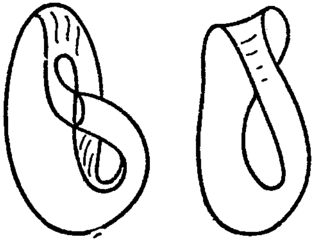
Очевидно, что при $q \geqslant 1$ сфера с q пленками неориентируема. (Так как неориентируемость, по нашему определению, — это наличие на поверхности пленок.)

Пример. Нарисовать сферу с пленками довольно трудно: будучи неориентируемой, она не вкладывается в трехмерное евклидово пространство. Однако *изобразить* ее все-таки можно. Например, вот так выглядит сфера с двумя пленками, иначе называемая



а б

Рис. 37



а б

Рис. 38

бутылкой Клейна (рис. 37, *а*, *б*). На рис. 37, *а* и *б* изображено множество — образ сферы с двумя пленками при некотором ее отображении в $\mathbb{R}^3$ (образы пленок заштрихованы). В этом множестве содержится *двойная окружность*, образованная точками, прообразы которых состоят из двух точек. Бутылка Клейна состоит из двух «половинок», гомеоморфных листу Мёбиуса (см. рис. 38, *а*, *б*).

Труднее изобразить сферу с одной пленкой — хорошо знакомую нам проективную плоскость.

Без доказательства отметим, что *всякая замкнутая неориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с несколькими пленками.*

Модельные поверхности с краем. Назовем поверхность *сферой с p ручками* (*пленками*) *и r дырами*, если в ней можно выделить p попарно непересекающихся ручек (пленок), не пересекающихся с краем поверхности, замыкание дополнения к которым гомеоморфно сфере с $p+r$ дырами.

Оказывается, что *всякая ориентируемая компактная поверхность гомеоморфна сфере с несколькими ручками и дырами*, а всякая неориентируемая — сфере с несколькими пленками и дырами.

Для полноты классификации нужно еще доказать, что сфера с пленками и дырами не гомеоморфна сфере с ручками и дырами и что сферы с разным количеством ручек (соответственно пленок) и дыр негомеоморфны. Этого мы здесь делать не будем. Зато в следующем параграфе будет указан способ, позволяющий узнать, какой из модельных поверхностей гомеоморфна данная поверхность.

Многообразия большей размерности. О трехмерных многообразиях известно немало, но до сих пор не доказана и не опровергнута важная гипотеза, выдвинутая еще в начале XX в. французским математиком Анри Пуанкаре. Чтобы сформулировать ее, дадим одно определение. Топологическое пространство X называется ***односвязным***, если оно линейно связно и всякое непрерывное отображение $S^1 \to X$ окружности в пространство X можно продолжить до непрерывного отображения $D^2 \to X$ всего круга D^2. Нетрудно видеть, что сфера S^n односвязна при $n \geqslant 2$.

Гипотеза Пуанкаре. *Всякое замкнутое односвязное трехмерное многообразие гомеоморфно трехмерной сфере.*

Как ни странно, аналоги гипотезы Пуанкаре, касающиеся многообразий размерности 5 и больше, доказаны. А недавно это сделано и для многообразий размерности 4. Более того, получена топологическая классификация вообще *всех* замкнутых односвязных четырехмерных многообразий.