§ 3. Триангуляции, клеточные разбиения. Теорема Эйлера

В результате классификации каждая компактная поверхность должна быть отнесена к какому-то определенному типу. При этом мы получаем представление ее в некотором каноническом виде. Для этого исходная поверхность должна с самого начала быть задана каким-либо способом. Из нашего чисто дескриптивного (т. е. описательного) определения возможный вид такого задания не ясен. Оказывается, что удобно для представления поверхностей воспользоваться *триангуляцией*.

Триангуляции. Пусть F — компактная поверхность. *Топологическим треугольником* T назовем часть поверхности F, для которой установлен гомеоморфизм

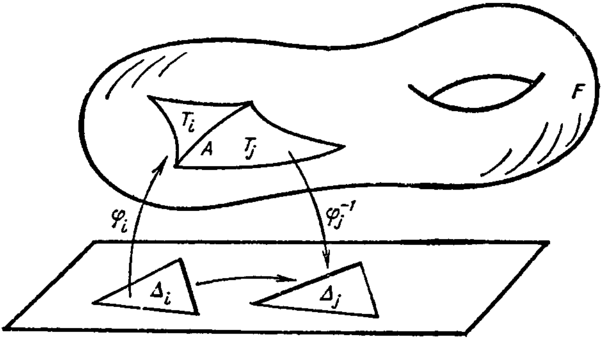


Рис. 39

$\varphi: \Delta \to T$ с некоторым плоским треугольником Δ. Образы сторон треугольника Δ назовем *сторонами* треугольника T, а образы вершин — его *вершинами*. Конечный набор треугольников $T_1, \ldots, T_k$ на компактной поверхности F образует ее *триангуляцию*, если выполнены следующие условия:

1) треугольники $T_1, \ldots, T_k$ покрывают поверхность F:

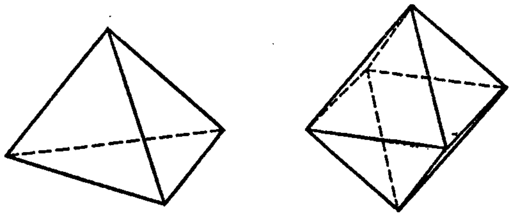
$$\bigcup_{i=1}^{k} T_i = F;$$

2) пересечение любых двух треугольников пусто или является их общей вершиной либо стороной;

3) если $A = T_i \cap T_j$ — общая сторона треугольников T_i и T_j, то отображение $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ линейно отображает отрезок $\varphi_i^{-1}(A)$ на отрезок $\varphi_j^{-1}(A)$ (рис. 39).

Условие 3 несущественно. Его выполнения всегда можно добиться, изменив гомеоморфизмы φ_i, если условия 1 и 2 уже выполнены.

Примеры. Такие выпуклые многогранники, как тетраэдр и октаэдр, дают триангуляцию двумерной сферы S^2, см. рис. 40, *а*, *б*. Существует триангуляция тора, в которой участвует всего 14 треугольников. Это — наименьшее возможное число треугольников в триангуляции тора. Пользуясь теоремой Брауэра об



а *б*

Рис. 40.

инвариантности области (§ 1, теорема 3) при $n = 2$, можно показать, что:

а) три треугольника в триангуляции не могут иметь общую сторону (т. е. одна сторона может принадлежать только одному или двум треугольникам триангуляции);

б) дополнение объединения всех треугольников с данной вершиной до самой этой вершины всегда (линейно) связно.

Эти условия вместе с условиями 1—3 из определения триангуляции можно взять за основу при (чисто комбинаторном) аксиоматическом описании триангулированной поверхности.

Как оказывается (Радо, 1924 г.), *любую компактную поверхность можно триангулировать* (некомпактные поверхности тоже триангулируемы при надлежащем определении триангуляции). Особенно просто это сделать в случае поверхностей геометрического происхождения, которые мы главным образом и имеем в виду. Впервые необходимость триангуляции появилась при проведении измерений на земной поверхности — в геодезии.

Клеточные разбиения поверхностей. Для наших целей удобнее воспользоваться не триангуляцией, а одним ее обобщением — *клеточным разбиением*. *Открытой клеткой* размерности n на поверхности называется подмножество, гомеоморфное $\mathbf{R}^n$, где $n=0$ 1, 2. (Заметим, что открытая клетка размерности n является открытым множеством тогда и только тогда, когда $n=2$!) Разбиение $F=\bigcup_{i=1}^{k} X_i$ поверхности F на открытые клетки $X_1, \ldots, X_k$ называется *клеточным*, если выполняется следующее условие.

Для каждой одномерной клетки X_i существует непрерывное отображение отрезка $\mathrm{I}=[0, 1]$ *в поверхность F, сужение которого на интервал* $(0, 1)$ *есть гомеоморфизм интервала* $(0, 1)$ *на X_i, а образы концов отрезка* I *являются нульмерными клетками* (*которые, возможно, совпадают*).

Край поверхности при этом тоже получает клеточное разбиение, состоящее из нульмерных и одномерных клеток.

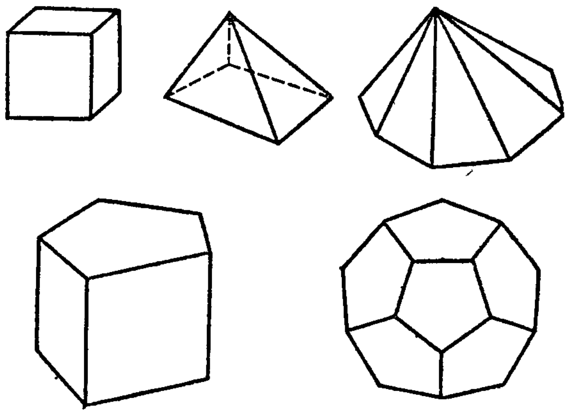


Рис. 41

Примеры. 1. Каждая триангуляция поверхности очевидным образом дает ее клеточное разбиение.

2. Выпуклые многогранники, такие как куб, пирамида, призма, додекаэдр и т. п., доставляют клеточные разбиения сферы (рис. 41).

3. Клеточные разбиения бывают намного более «экономными», чем триангуляции. Так, у сферы есть клеточное разбиение, состоящее из одной нульмерной и одной двумерной клетки, а у тора есть разбиение

из одной нульмерной, двух одномерных и одной двумерной клетки (рис. 42).

Замкнутые клетки. Замыкание открытой клетки называется *замкнутой клеткой*. В отличие от случая триангуляции замкнутая двумерная клетка может быть не гомеоморфна многоугольнику. Так, в разбиениях из примера 3 замкнутая двумерная клетка совпадает со всей поверхностью (точно так же и замкнутая одномерная клетка может быть гомеоморфна

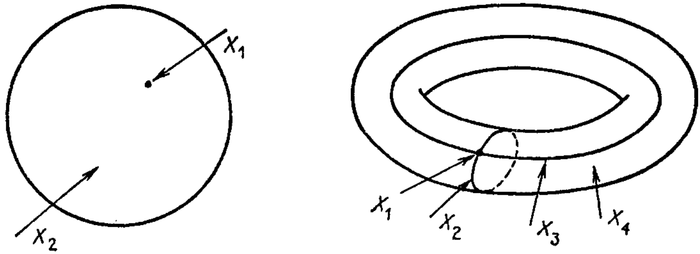


Рис. 42

не отрезку I, а окружности S^1). Тем не менее справедливо некоторое более слабое утверждение. Чтобы его сформулировать, нам понадобится понятие n-угольника при $n = 0$, 1 и 2. Впрочем, определение будет иметь смысл для любого n.

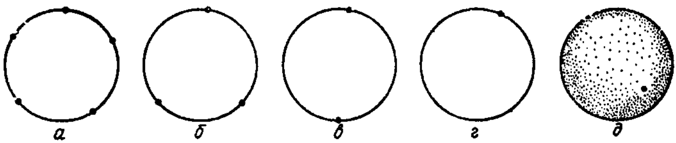


Рис. 43

Определение. При $n \geqslant 1$ *модельным* n*-угольником* назовем круг, на границе которого отмечено n точек (рис. 43, *а* — *г*). *Нульугольником* назовем сферу с одной отмеченной точкой (рис. 43, *д*).

При $n \geqslant 3$ для модельного n-угольника существует гомеоморфизм его на любой обычный n-угольник, при котором отмеченные точки переходят в вершины, а дуги с отмеченными концами — в стороны. Каждый модельный n-угольник очевидным образом снабжается клеточным разбиением, в котором участвуют n нульмерных, n одномерных и одна двумерная клетка (исключение представляет нульугольник — у него одна нульмерная, одна двумерная и ни одной одномерной клетки).

Можно показать, что *на всякую замкнутую двумерную клетку можно так отобразить некоторый модельный n-угольник, чтобы каждая его открытая клетка гомеоморфно отображалась на некоторую открытую клетку исходного разбиения* (*той же размерности*). (При этом нульугольник может потребоваться только в том случае, если замкнутая клетка совпадает со всей поверхностью и гомеоморфна сфере S^2.) При желании это свойство можно включить в определение клеточного разбиения поверхности, тем более что в случае триангуляции оно выполнено автоматически.

Пример. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$. Его поверхность, гомеоморфная сфере, обладает клеточным

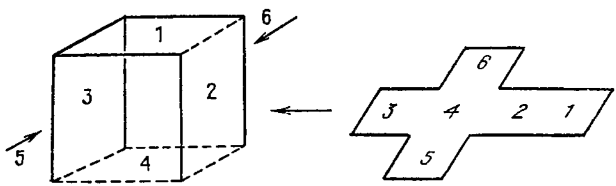


Рис. 44

разбиением, в котором нульмерными клетками служат вершины куба, а одномерными — ребра AA', $A'D'$, DD', $D'C'$, $C'C$, $A'B'$, BB'. В этом разбиении всего одна двумерная клетка. Соответствующее отображение многоугольника на замкнутую двумерную клетку (совпадающую со всем кубом) нетрудно построить, взяв за основу хорошо известную развертку куба (рис. 44).

Формула Эйлера. У одной и той же поверхности F может быть много различных триангуляций и еще больше клеточных разбиений. Количество клеток в этих клеточных разбиениях тоже может быть самым различным. Но оказывается, что если из общего числа нульмерных и двумерных клеток вычесть количество одномерных клеток, то результат не будет зависеть от выбора разбиения. Полученное число называется *эйлеровой характеристикой* поверхности F и обозначается $\chi(F)$. Если обозначить количество нульмерных, одномерных и двумерных клеток разбиения через α_0, α_1 и α_2 соответственно, то получим

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(F).$$

Эйлер впервые заметил, что в случае сферы всегда $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$, т. е. $\chi(S^2) = 2$. В частности, имеет место

Теорема. *Если дан выпуклый многогранник, у которого* В *вершин,* Р *ребер и* Г *граней, то будет выполняться равенство*

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2.$$

Эта формула была известна еще Ферма и Декарту.

Нетрудно проверить на конкретных примерах клеточных разбиений, что эйлерова характеристика сферы с p ручками и r дырами равна $2 - 2p - r$, а эйлерова характеристика сферы с q пленками и r дырами равна $2 - q - r$. Таким образом, эйлерова характеристика $\chi(F)$, число компонент края r и ориентируемость или неориентируемость связной поверхности F образуют полный набор ее топологических инвариантов.

Доказательство топологической инвариантности эйлеровой характеристики поверхности выходит за рамки теоретико-множественной топологии. Здесь мы ограничимся тем, что докажем формулу Эйлера $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$ для выпуклых многогранников.

Доказательство теоремы. Будем последовательно изменять разбиение сферы, соответствующее данному многограннику, стирая некоторые ребра и вершины и следя при этом за изменением чисел α_0, α_1 и α_2. В первый момент $\alpha_0 = \text{В}$, $\alpha_1 = \text{Р}$, $\alpha_2 = \Gamma$. Далее будем поступать так. Каждый раз будем брать какое-нибудь ребро и начинать строить простую ломаную, добавляя к нему по очереди еще не стертые ребра. Если в некоторый момент мы не сможем добавить к ломаной ребро, значит, мы нашли такую вершину, что все выходящие из нее ребра, кроме одного, уже стерты. Тогда сотрем эту вершину и это ребро. При этом соответствующая двумерная клетка изменится (см. рис. 45), но общее количество двумерных клеток останется прежним.

Если обозначить через α'_i количество i-мерных клеток в получившемся разбиении, то мы получим

$$\alpha'_0 = \alpha_0 - 1, \quad \alpha'_1 = \alpha_1 - 1, \quad \alpha'_2 = \alpha_2.$$

Легко видеть, что $\alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$.

Если же мы сможем построить из нестертых ребер простую замкнутую ломаную, то после стирания

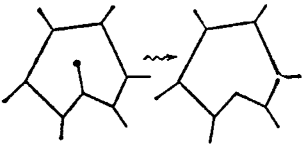


Рис. 45

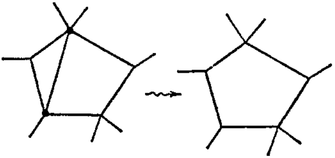


Рис. 46

любого из входящих в нее ребер разделяемые ими двумерные клетки[1]) «сольются» в одну (рис. 46), и мы получим: $\alpha'_0 = \alpha_0$, $\alpha'_1 = \alpha_1 - 1$, $\alpha'_2 = \alpha_2 - 1$. По-прежнему $\alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$.

Повторяя эту операцию, мы в конце концов придем к нульугольнику, у которого $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, и, следовательно, $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$. Поскольку значение рассматриваемого выражения $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ при переходе от исходного клеточного разбиения к нульугольнику нигде не менялось, то и для исходного многогранника имеет место равенство $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$, что и требовалось доказать. □