§ 4. Топологическая классификация ориентируемых замкнутых поверхностей

Наша цель здесь состоит в том, чтобы доказать следующую основную теорему.

Теорема 1. *Всякая замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с несколькими ручками.*

Для доказательства воспользуемся очень удобным средством описания поверхностей, которое дают в наше распоряжение клеточныс разбиения. Чтобы описать клеточное разбиение поверхности F, изобразим на плоскости (отдельно друг от друга) все многоугольники, соответствующие различным замкнутым клеткам, и пометим у этих многоугольников пары сторон, отображающиеся в одну и ту же одномерную клетку. Если одна из сторон в такой паре ориентирована, то сквозной гомеоморфизм определит согласованную ориентацию второй стороны. Такое семейство многоугольников, некоторые стороны которых объединены в пары и при этом согласованно ориентированны, будем называть *выкройкой* поверхности

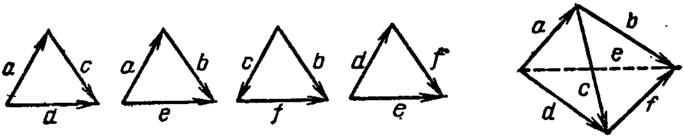


Рис. 47

F. Удобно стороны, образующие отмеченную пару, обозначать одной буквой, а ориентацию указывать стрелкой. Выкройку, состоящую из одного многоугольника, назовем *разверткой* поверхности F.

Примеры. На рис. 47 приведена выкройка тетраэдра, соответствующая его триангуляции, на рис. 48 — выкройка сферы с тремя дырами. На

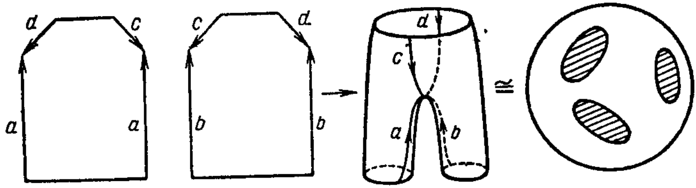


Рис. 48

рис. 49 изображены развертки известных правильных многогранников, на рис. 50 — развертки трубки, листа Мёбиуса, тора, бутылки Клейна, проективной плоскости (2 штуки). На рис. 51 — развертка сферы с двумя ручками. Аналогично выглядит развертка сферы с произвольным числом ручек. Такая развертка называется *канонической*. На рис. 52 изображена развертка сферы с тремя дырами. Так же выглядит развертка сферы с большим числом дыр.

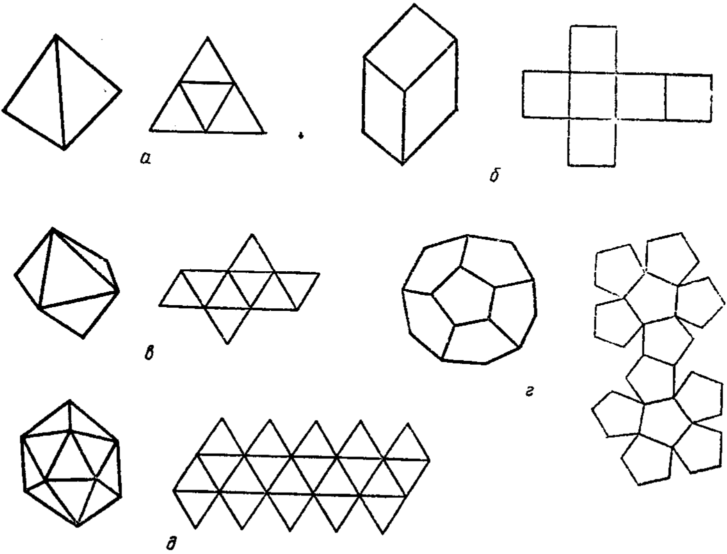


Рис. 49

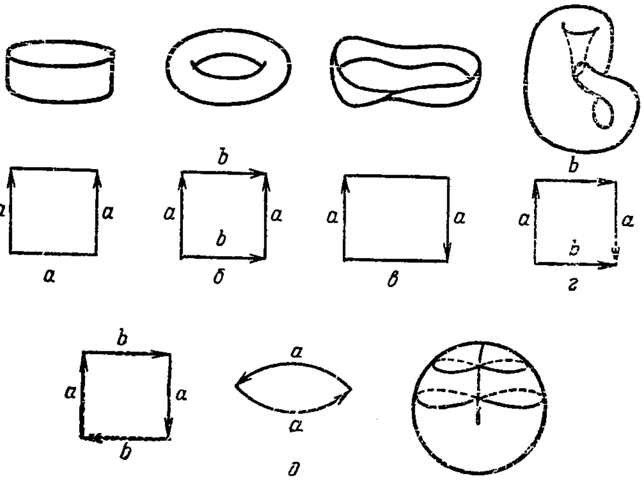


Рис. 50

Замечания. 1. В случае триангуляции удобнее отмечать одной буквой не пары сторон, а вершины, соответствующие одной и той же вершине триангуляции.

2. Можно показать, что всякая выкройка определяет некоторую поверхность с краем — так сказать, результат *склеивания* (или сшивания) кусков выкройки по сторонам, объединенным в пары.

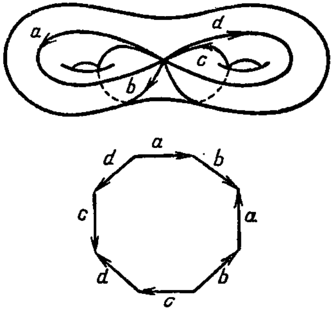


Рис. 51

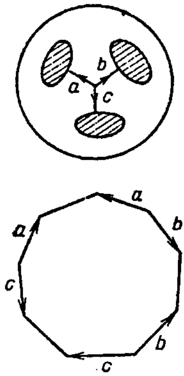


Рис. 52

Приступим к доказательству теоремы. Пусть F — произвольная ориентируемая замкнутая поверхность. Рассмотрим какую-нибудь ее выкройку (например, выкройку из треугольников, соответствующую какой-нибудь триангуляции этой поверхности). Занумеруем произвольным образом отмеченные пары сторон многоугольников, образующих выкройку.

Рассмотрим первую отмеченную пару сторон. Если это стороны разных многоугольников выкройки, то выбросим соответствующую им одномерную клетку из разбиения поверхности. При этом две двумерные клетки сливаются в одну. Новому разбиению будет отвечать выкройка, в которой вместо двух прежних многоугольников участвует один, соответствующий новой двумерной клетке, см. рис. 53. Если же эти стороны принадлежат одному и тому же многоугольнику выкройки, то изменим разбиение следующим образом.

Разобьем одномерную клетку, соответствующую нашей паре сторон, на три. При этом придется добавить к разбиению и две одномерные клетки, каждая из которых «начинается и оканчивается» в одной из новых нульмерных клеток. При этом прежняя двумерная клетка разобьется на три новых. Чтобы получить соответствующую выкройку, надо заменить

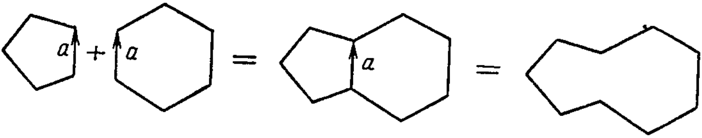


Рис. 53

рассматриваемый многоугольник на те три, которые получаются из него при разрезании вдоль двух непересекающихся отрезков, соединяющих отмеченные стороны. При этом образуются пять новых отмеченных пар сторон вместо одной исходной; см. рис. 54.

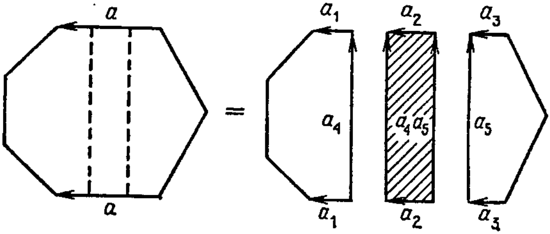
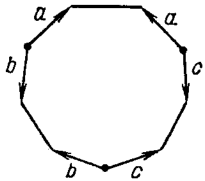


Рис. 54

Наш выбор ориентации для сторон, обозначенных буквой a, требует пояснений. Если бы одна из них была ориентирована в другую сторону, то средний четырехугольник, входящий в новую выкройку (на рис. 54 заштрихован) давал бы нам развертку листа Мёбиуса, содержащегося в поверхности F. А это невозможно в силу ее ориентируемости. В частности, отдельно взятый средний четырехугольник образует развертку кольца.

Теперь проделаем то же самое со второй отмеченной парой сторон, потом с третьей и т. д. (При этом мы не будем затрагивать пары сторон, образовавшиеся на предыдущих этапах. Речь идет лишь об исходно занумерованных парах.) По окончании этой процедуры мы получим выкройку исходной поверхности, в которой каждый многоугольник будет либо четырехугольником вида

либо иметь вид



Соответствующие замкнутые клетки будут гомеоморфны либо кольцу, либо сфере с дырами, причем

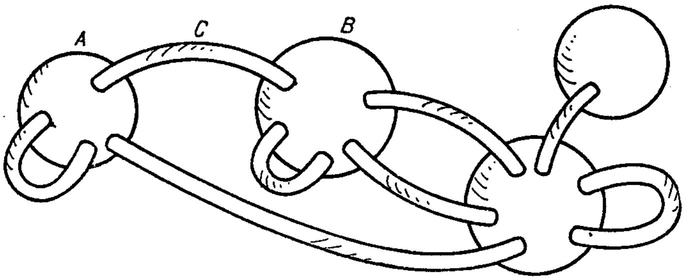


Рис. 55

клетки последнего типа будут пересекаться только с кольцевыми клетками, т. е. с трубками. Таким образом, мы нашли несколько трубок, замыкание дополнения к которым состоит из нескольких сфер с дырами. Для окончания доказательства нам потребуется еще одно описание сфер с ручками.

Предположим, что в ориентируемой поверхности F можно выделить несколько попарно непересекающихся трубок, так чтобы замыкание дополнения к ним состояло из n компонент, каждая из которых была бы гомеоморфна сфере с дырами (рис. 55). Тогда индукцией по n можно показать (как это намечено ниже), что *поверхность F гомеоморфна сфере с ручками.*

Для $n=1$ это выполняется по определению. Если $n \geqslant 2$, то всегда найдутся две компоненты (на рисунке 55 это компоненты A и B) и «соединяющая их» трубка (на рис. 55 — трубка C), объединение которых гомеоморфно сфере с дырами (рис. 56). Ясно,

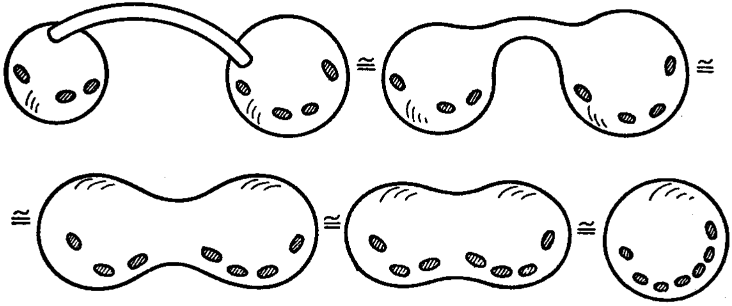


Рис. 56

далее, что замыкание дополнения к остальным трубкам (кроме трубки C) состоит уже из $n-1$ компонент, каждая из которых по-прежнему гомеоморфна сфере с дырами. Осталось воспользоваться индуктивным предположением.

Теорема доказана. □

В качестве очень полезного и интересного упражнения предлагаем читателю проследить все детали доказательства на примере многогранников, как они определены в § 4 гл. II ч. 2. А именно, докажите, что всякая замкнутая многогранная поверхность гомеоморфна сфере с несколькими ручками.