

перейти от одного к другому путем какого бы ни было «точечного преобразования». Объяснюсь подробнее. Я предполагаю, что каждой точке одного соответствует одна и только одна точка другого и обратно; и, сверх того, пусть координаты одной точки будут непрерывными функциями, *безразлично какими*, координат соответствующей точки. Затем я предполагаю, что каждому предмету первого мира соответствует во втором предмет той же природы, помещающийся как раз в соответствующей точке. Я предполагаю, наконец, что это соответствие, осуществившееся в начальный момент, сохраняется на неопределенное время. Тогда у нас не было бы никакого средства отличить эти два мира один от другого. Когда говорят об *относительности пространства*, обычно понимают ее не в таком широком смысле, тогда как ее следовало бы понимать именно таким образом.

Если один из этих миров есть наш евклидов мир, тогда то, что обитатели его назовут прямою, будет наша евклидова прямая, а то, что обитатели второго мира назовут прямою, будет кривая, обладающая такими же свойствами по отношению к тому миру, который они населяют, и по отношению к тем движениям, которые они назовут движениями без деформации; потому их геометрией будет евклидова геометрия, но их прямая не будет наша евклидова прямая. Это будет своя прямая, преобразованная путем того точечного преобразования, которое позволяет переходить от нашего мира к их миру; прямые этих людей не будут наши прямые, но они будут иметь между собой те же самые отношения, как наши прямые между собой; вот в каком смысле я говорю, что их геометрией будет наша геометрия. Тогда, если мы захотим решительно объявить, что они ошибаются, что их прямая не есть истинная прямая, если мы не пожелаем признать, что подобное утверждение не имеет никакого смысла, то мы по крайней мере должны будем признать, что у этих людей нет каких-либо средств заметить свою ошибку.

§ 2. Качественная геометрия

Все это сравнительно легко для понимания, и я уже так часто повторял это, что считаю бесполезным дальше распространяться об этом предмете. Евклидо-

во пространство не есть форма, наложенная на нашу чувственность, потому что мы можем вообразить себе неевклидово пространство; но оба пространства — евклидово и неевклидово — имеют одно общее основание, тот аморфный континуум, о котором я говорил вначале; из этого континуума мы можем извлечь то евклидово пространство, то пространство Лобачевского — так же как, реализуя соответствующее градуирование, мы можем из неградуированного термометра сделать либо термометр Фаренгейта, либо термометр Реомюра.

Тогда возникает вопрос: не является ли этот аморфный континуум, который наш анализ оставил существующим, формой, наложенной на нашу чувственность? Мы расширили бы тюрьму, в которой заключена наша чувственность, но это все-таки была бы тюрьма.

Эта непрерывность обладает известным числом свойств, свободных от всякой идеи измерения. Исследование этих свойств составляет предмет науки, разработанной несколькими великими геометрами, в особенности Риманом и Бетти, и получившей название *Analysis Situs*. В этой науке отвлекаются от всякой количественной идеи; например, если констатируется, что точка B лежит на некоторой линии между точками A и C , то довольствуются этим утверждением и не трудятся узнать, прямая ли линия ABC или кривая, равна ли длина AB длине AC или вдвое больше ее.

Поэтому теоремы *Analysis Situs* имеют ту особенность, что они остались бы справедливыми, если бы фигуры чертились неискусной рукой, которая грубо искажала бы все пропорции и заменяла бы прямые более или менее извилистыми линиями. Выражаясь математически, они не менялись бы от какого бы то ни было «точечного преобразования». Часто говорили, что метрическая геометрия — геометрия количественная, тогда как проективная геометрия — геометрия чисто качественная; это не совсем верно: то, что отличает прямую от других линий, это — еще свойства, остающиеся в некоторых отношениях количественными. Следовательно, настоящая качественная геометрия есть *Analysis Situs*.

Те же самые вопросы, которые возникали по поводу истин евклидовой геометрии, снова возникают относительно теорем *Analysis Situs*. Можно ли их получить путем дедуктивного рассуждения? Не являются ли они скрытыми соглашениями? Или они суть экспериментальные истины? Являются ли они свойствами формы, наложенной на нашу чувственность или на наш разум?

Я просто замечу, что два последних решения исключают друг друга; это не всегда ясно сознавали. Мы не можем допустить одновременно, что невозможно представить себе пространство четырех измерений и что опыт доказывает нам, что пространство имеет три измерения. Экспериментатор ставит природе вопрос: то или другое? — И он не может ставить его, не представляя себе в то же время двух сторон альтернативы. Если бы невозможно было представить себе одну из этих сторон, то было бы бесполезно да и невозможно обращаться к опыту. Мы не нуждаемся в наблюдении для того, чтобы знать, что часовая стрелка не стоит на 15-м делении циферблата, потому что мы заранее знаем, что делений только 12, и мы не могли бы взглянуть на 15-е деление, чтобы проверить, находится ли там стрелка, потому что такого деления нет.

Заметим также, что здесь эмпирики свободны от одного из самых сильных возражений, какое можно направить против них, — от возражения, которое заранее делает совершенно напрасными все их усилия приложить свой тезис к истинам евклидовой геометрии. Эти истины строги, а всякий опыт может быть только приближенным. В *Analysis Situs* бывает достаточно и приближенных опытов, чтобы дать строгую теорему; например, если мы видим, что пространство не может иметь ни двух или менее двух измерений, ни четырех или более четырех измерений, то мы уверены, что оно имеет их три, ибо не может иметь два с половиной или три с половиной.

Из всех теорем *Analysis Situs* самая важная — та, которая выражается словами: пространство имеет три измерения. Этой теоремой мы сейчас займемся, причем поставим вопрос в таком виде: что мы хотим сказать, когда говорим, что пространство имеет три измерения?