§ 3. Физическая непрерывность многих измерений

В «Науке и гипотезе» [1]) я выяснил, откуда у нас появляется понятие физической непрерывности и как из него могло возникнуть понятие математической непрерывности. Случается, что мы бываем способны отличать друг от друга два впечатления, не будучи в состоянии отличить каждое из них от одного и того же третьего. Так мы легко можем отличить вес 12 граммов от веса 10 граммов, тогда как невозможно отличить вес 11 граммов ни от того, ни от другого.

Подобное утверждение символически можно представить так:

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C.$$

Это была бы формула физической непрерывности, как дает ее нам непосредственный опыт. Происходящее отсюда нетерпимое противоречие устраняется введением математической непрерывности. Эта последняя представляет собой лестницу с бесконечно большим числом ступеней (числа соизмеримые или несоизмеримые), причем эти ступени занимают по отношению друг к другу внешнее положение, а не захватывают друг друга, как это имеет место, сообразно с предыдущей формулой, между элементами физической непрерывности.

Физическая непрерывность есть, так сказать, неразрешенная (неразложенная на составные элементы) туманность, и самые совершенные инструменты не могли бы разрешить ее. Конечно, если бы мы определяли вес с помощью хороших весов, а не просто рукою, то мы бы отличили вес 11 граммов от весов 10 и 12 граммов, и тогда наша формула представилась бы так:

$$A < B, \; B < C, \; A < C.$$

Но между A и B и между B и C всегда нашлись бы такие новые элементы D и E, что

$$A = D, \quad D = B, \quad A < B; \quad B = E, \quad E = C, \quad B < C;$$

трудность только передвинулась бы; туманность всегда оставалась бы неразрешенной; разрешить ее может только мышление — и математическая непре-

[1]) См. с. 27 и след.

рывность есть именно туманность, разрешенная на отдельные звезды.

Однако до сих пор мы не вводили понятия о числе измерений. Что мы хотим сказать, когда говорим, что математическая непрерывность или физическая непрерывность имеет два или три измерения?

Нам надо прежде всего ввести понятие *купюры*, приспособляя это понятие сначала к исследованию физических непрерывностей. Мы видели, чем характеризуется физическая непрерывность; каждый элемент этой непрерывности состоит из совокупности впечатлений; может случиться: либо что один элемент не может быть отличен от другого элемента той же непрерывности, если этот новый элемент соответствует совокупности слишком мало разнящихся впечатлений, либо, напротив, что отличение возможно; наконец, может быть и так, что два элемента, неотличимые от одного и того же третьего, тем не менее могут быть отличены друг от друга.

После этого, если A и B суть два различимых элемента непрерывности C, то можно найти ряд элементов

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

принадлежащих той же самой непрерывности C и притом таких, что каждый из них неотличим от предыдущего; так E_1 будет элементом, неотличимым от A, а E_n — от B. Поэтому можно будет переходить от A к B непрерывным путем, в то же время не выходя из C. Если это условие выполнено для двух любых элементов A и B непрерывности C, то мы можем сказать, что эта непрерывность *C односвязна.*

Теперь выделим некоторые из элементов C, которые могут или все быть отличены друг от друга, или же могут сами образовать одну или несколько непрерывностей. Совокупность элементов, таким образом произвольно выбранных из всех элементов C, даст то, что я назову *купюрой* или *купюрами.*

Возьмем снова на C два любых элемента A и B. Тогда или можно будет найти еще ряд элементов

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

таких, чтобы: 1) все они принадлежали C; 2) чтобы каждый из них был неотличим от следующего; E_1

неотличим от A и E_n — от B; 3) *кроме того, чтобы каждый из элементов E отличался от каждого из элементов купюры.* Или же, напротив, во всех рядах $E_1, E_2, \ldots, E_n$, удовлетворяющих первым двум условиям, будет содержаться элемент E, неотличимый от одного из элементов купюры. В первом случае мы можем идти от A к B непрерывным путем, не выходя из C и *не встречая купюр*; во втором случае это невозможно.

Итак, если для любых двух элементов A и B непрерывности C всегда находит себе место первый случай, мы скажем, что C остается *односвязной*, несмотря на купюры.

Следовательно, если мы известным, впрочем произвольным, образом выберем купюры, то может случиться, что непрерывность или останется, или не останется односвязной; в последнем случае мы скажем, что она *разделена* купюрами.

Нельзя не заметить, что все эти определения основаны единственно на том простом факте, что две совокупности впечатлений то могут, то не могут быть различаемы.

Если для *разделения* непрерывности достаточно бывает рассматривать в качестве купюр известное число элементов, отличимых друг от друга, то говорят, что эта непрерывность *одного измерения*; если же, напротив, для разделения непрерывности необходимо брать в качестве купюр систему элементов, которые сами образуют одну или несколько непрерывностей, то мы скажем, что эта непрерывность *многих измерений.*

Если для разделения непрерывности C достаточно купюр, образующих одну или несколько непрерывностей одного измерения, то мы скажем, что C есть непрерывность *двух измерений*; если достаточно купюр, образующих одну или несколько непрерывностей самое большее двух измерений, то мы скажем, что C есть непрерывность *трех измерений*, и т. д.

Чтобы оправдать это определение, надо посмотреть, так ли геометры вводят понятие трех измерений в начале своих работ. Что же мы видим? Чаще всего они начинают с определения поверхностей как пределов объемов или частей пространства, линий как пределов поверхностей, точек как пределов линий и утверждают, что тот же самый процесс не может идти дальше.

Здесь та же идея; чтобы разделить пространство, нужны купюры, которые называются поверхностями; чтобы разделить поверхности, нужны купюры, которые называются линиями: чтобы разделить линии, нужны купюры, которые называются точками; дальше идти нельзя, и точка не может быть разделена, точка не есть непрерывность; тогда линии, которые можно делить купюрами, не представляющими собой непрерывностей, будут непрерывностями одного измерения; поверхности, которые можно делить купюрами — непрерывностями одного измерения, — будут непрерывностями двух измерений; наконец, пространство, которое можно делить купюрами — непрерывностями двух измерений,— будет непрерывностью трех измерений.

Таким образом, определение, которое я только что дал, по существу не отличается от обычных определений; я только хотел сообщить ему форму, применимую не к математической непрерывности, а к физической, которая одна только доступна для представления, и вместе с тем хотел сохранить всю его точность.

Впрочем, видно, что это определение приложимо не только к пространству, что во всем том, что воспринимается нашими чувствами, мы встречаем характерные признаки физической непрерывности, что и допускает возможность одной и той же классификации; легко было бы найти примеры непрерывностей четырех, пяти измерений в смысле предыдущего определения; эти примеры возникают в уме сами собой.

Наконец, я мог бы изложить, если бы у меня было на это время, как наука, о которой я говорил выше и которую Риман назвал Analysis Situs, учит нас различать непрерывности одного и того же числа измерений и как классификация этих непрерывностей опирается по-прежнему на рассмотрение купюр.

Из этого понятия произошло понятие математической непрерывности многих измерений тем же способом, каким физическая непрерывность одного измерения произвела математическую непрерывность одного измерения. Формула

$$A > C, \quad A = B, \quad B = C,$$

которая резюмировала грубые данные опыта, содержала в себе нетерпимое противоречие. Чтобы избавиться от него, нужно было ввести новое понятие, впрочем, принимая во внимание существенные свойства физической непрерывности многих измерений. Математическая непрерывность одного измерения допускает единственную шкалу с бесконечным числом ступеней, которые соответствуют разным соизмеримым или несоизмеримым значениям одной и той же величины. Для того чтобы получить математическую непрерывность n измерений, достаточно взять n подобных шкал, ступени которых будут соответствовать различным значениям n независимых величин, называемых координатами. Таким образом, получится изображение физической непрерывности n измерений, и это изображение — насколько это возможно — будет верным, если только не желают допустить существование того противоречия, о котором я говорил выше.

§ 4. Понятие точки

Теперь, по-видимому, решен вопрос, который мы поставили себе вначале. Когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, то мы, скажут нам, подразумеваем, что совокупность точек пространства удовлетворяет определению, которое мы только что дали для физической непрерывности трех измерений. Удовлетвориться этим значило бы предположить, что мы знаем, что такое совокупность точек пространства или даже что такое одна точка пространства.

А это не так просто, как кажется. Все думают, что знают, что такое точка; и мы даже полагаем, что нет нужды в ее определении именно потому, что мы слишком хорошо знаем ее. Конечно, нельзя требовать от нас умения определить ее, потому что при переходе от определения к определению необходимо должен наступить момент, когда приходится остановиться. Но когда же следует остановиться?

Прежде всего, остановка произойдет тогда, когда дойдем до предмета, который поддается восприятию наших чувств или который можно себе представить; тогда определение станет бесполезным; ребенку ведь не определяют барана, ему говорят: *вот* баран.