Часть II

ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ

Глава V

АНАЛИЗ И ФИЗИКА

I

Несомненно, вам неоднократно задавали вопрос: для чего нужна математика? Не являются ли все эти тонкие построения, которые мы полностью черпаем из своего ума, искусственным плодом нашей прихоти?

Я должен установить различие между людьми, задающими подобные вопросы. Люди практические требуют от нас только способов наживы денег. Эти люди не заслуживают ответа. Скорее следовало бы их спросить, для чего накапливают они богатства и нужно ли тратить время на их приобретение и пренебрегать искусством и наукой, которые только и делают наш дух способным наслаждаться, et propter vitam vivendi perdere causam [1]).

К тому же наука, созданная исключительно в прикладных целях, невозможна; истины плодотворны только тогда, когда между ними есть внутренняя связь. Если ищешь только тех истин, от которых можно ждать непосредственных результатов, то связующие звенья ускользают и цепь распадается.

Люди, относящиеся с полным презрением к теории, тем не менее, не колеблясь, извлекают из нее постоянные выгоды; если бы они лишились этих выгод, то это быстро остановило бы прогресс, и мы застыли бы в косности, подобно Китаю.

Но не будем больше говорить об этих неисправимых практиках. Рядом с ними существуют люди, стремящиеся исключительно к познанию природы, которые обращаются к нам с вопросом, в состоянии ли мы

---

[1]) И ради сохранения жизни утратить ее смысл (*лат.*, из Ювенала). — *Примеч. ред.*

оказать им помощь в более глубоком понимании природы.

Чтобы ответить этим людям, нам достаточно только указать на два уже воздвигнутых монументальных сооружения — небесную механику и математическую физику.

Нет сомнения, — с нами согласятся, что эти сооружения сто́ят положенного на них труда; но этого не достаточно.

Математика преследует троякую цель. Она должна давать орудие для изучения природы. Но это не все: она преследует цель философскую, и — я решаюсь сказать — эстетическую.

Математика должна помогать философу углубляться в понятия числа, пространства и времени.

Люди, посвященные в ее тайны, вкушают наслаждения, подобные тем, которые дает нам живопись и музыка. Они восторгаются изящной гармонией чисел и форм; они приходят в восхищение, когда какое-нибудь новое открытие раскрывает перед ними неожиданные перспективы. Разве в наслаждениях, испытываемых этими людьми, нет эстетического характера, несмотря даже на то, что чувства в этих состояниях не принимают никакого участия? Правда, только немногие избранные призваны к тому, чтобы вполне вкусить эти наслаждения. Но разве это не имеет места и в случае наиболее благородных искусств?

Поэтому я, не колеблясь, скажу, что математика заслуживает развития сама по себе и что теории, которые не могут быть применимы в физике, должны развиваться так же, как и другие. Если бы даже цели физики и цели эстетики не совпадали между собой, мы не должны были бы приносить в жертву ни тех, ни других. Более того, эти два рода целей неразделимы, и лучшее средство достигнуть одних — это преследовать другие или, по крайней мере, никогда не упускать их из виду. Я постараюсь доказать это, точно определяя сущность взаимного отношения между чистой наукой и ее приложениями.

Математик не должен быть простым поставщиком формул для физика; между ними необходимо более тесное сотрудничество

Математическая физика и чистый анализ не только граничат друг с другом, как две державы, сохраняющие отношения доброго сеседства, но они проникают друг в друга и имеют одну и ту же душу. Это станет более понятным, когда я укажу, что́ приобретает физика от математики и чем, наоборот, математика пользуется от физики.

II

Физик не может обращаться к аналитику с требованием открыть ему какую-либо новую истину. В лучшем случае аналитик мог бы помочь ему предугадать ее.

Уже давно никто не помышляет больше опережать опыт или строить целое мироздание на основании нескольких незрелых гипотез. От всех этих построений, которыми наивно удовлетворялись еще столетие тому назад, ныне не осталось ничего, кроме развалин.

Итак, все законы выводятся из опыта. Но для выражения их нужен специальный язык. Обиходный язык слишком беден, кроме того, он слишком неопределенен для выражения столь богатых содержанием точных и тонких соотношений.

Таково первое основание, по которому физик не может обойтись без математики; она дает ему единственный язык, на котором он в состоянии изъясняться.

Точно определенный язык — вещь весьма не безразличная. Возьмем пример из области той же физики. Неизвестный изобретатель слова «теплота» ввел в заблуждение целые поколения. Теплоту стали рассматривать как вещество (просто потому, что она была названа именем существительным) и стали считать ее неуничтожаемой.

Но, с другой стороны, тот, кто ввел в науку слово «электричество», снискал незаслуженную честь подарить физике новый закон — закон сохранения электричества, который, благодаря чистой случайности, оказался точным; так, по крайней мере, было до настоящего времени.

Писатели, украшающие язык и относящиеся к нему как к объекту искусства, этим самым делают из него орудие более гибкое, более приспособленное для передачи всех оттенков мысли. Так и аналитик, преследующий чисто эстетические цели, содействует созиданию языка, более приспособленного к тому, чтобы удовлетворить физика.

Это еще не все. Закон вытекает из опыта, но он следует из него не непосредственно. Опыт индивидуален, а закон, который из него извлекается, имеет характер общности. Опыт бывает только приближенным; закон является точным или, по крайней мере, имеет притязание на точность. Опыт всегда осуществляется в сложных условиях — формулировка закона исключает их; это называется «исправлением систематических погрешностей». Словом, чтобы вывести закон из опыта, необходимо обобщать; этой необходимости подчиняется даже наиболее осмотрительный наблюдатель.

Но каким образом строить эти обобщения? Каждая частная истина, очевидно, может быть широко истолкована бесчисленным множеством способов. Из тысячи путей, открывающихся перед нами, необходимо сделать выбор, по крайней мере предварительный; кто будет руководить нами в этом выборе?

Этим руководителем может быть только аналогия. Но как неопределенно это слово! Человек с примитивным мировоззрением знает только грубые аналогии, действующие на чувства, аналогии в красках и звуках. Он не стал бы думать, например, об установлении связи между светом и лучистой теплотой.

Но кто же научил нас познанию истинных, глубоких аналогий таких, которых не видит глаз, но которые отгадывает разум?

Этому научил нас математический ум, который пренебрегает содержанием, чтобы иметь дело только с чистой формой. Это он научил нас называть одним и тем же именем все сущности, отличающиеся только своим содержанием; он научил нас называть одним именем, например, умножение кватернионов и умножение целых чисел.

Если бы кватернионы, о которых я только что упомянул, не нашли столь скорого применения у английских физиков, многие без сомнения увидели бы в них только праздное мечтание; но все же они, научая нас сближать то, что по внешнему виду так различно, сделали нас более способными проникать в тайны природы.

Таковы услуги, которых физик должен ожидать от анализа. Но для того, чтобы эта наука могла их ему оказать, ей необходимо развиваться самым широким образом, без непосредственной заботы о пользе; необходимо, чтобы математик работал, как артист. Мы обращаемся к нему только с одной просьбой — помочь нашему зрению, помочь нам отыскать путь в развертывающемся перед нами лабиринте. Но всего лучше видит тот, кто поднялся всех выше. Примеров множество; я ограничусь только наиболее разительными.

Первый пример покажет нам, как бывает достаточно изменить язык, чтобы заметить обобщения, которых раньше никто не подозревал.

В то время, когда закон Ньютона заменил закон Кеплера, было известно только эллиптическое движение. По отношению к этому движению оба закона разнятся между собой только по форме; можно перейти от одного к другому простым дифференцированием.

Но между тем из закона Ньютона можно путем непосредственного обобщения вывести все эффекты возмущений и всю небесную механику. Напротив, если бы сохранился способ выражения, данный Кеплером, то никто не стал бы рассматривать возмущенные орбиты планет — эти сложные кривые линии, для которых никто никогда не писал уравнения, — как естественные обобщения эллипса. Весь прогресс наблюдений послужил бы только усилению веры в хаос.

Второй пример также заслуживает подробного размышления.

В то время, когда Максвелл начал свои труды, законы электродинамики, принятые до него, объясняли все известные явления. Он приступил к работе не потому, чтобы какой-либо новый опыт ограничил значение этих законов. Но рассматривая их под новым углом зрения, Максвелл увидел, что уравнения становятся более симметричными, если в них ввести некоторый член, хотя, с другой стороны, этот член был слишком мал, чтобы вызвать явления, который могли бы быть оценены прежними методами.

Известно, что априорные взгляды Максвелла ждали своего экспериментального подтверждения в течение двадцати лет; если вам больше нравится другое выражение, — Максвелл опередил опыт на двадцать лет. Как он достиг этого триумфа?

Это произошло благодаря тому, что Максвелл был глубоко проникнут чувством математической симметрии; могло ли это быть, если бы до него другие не искали этой симметрии ради ее собственной красоты?

Это произошло благодаря тому, что Максвелл привык «мыслить векторами». Но векторы вошли в анализ через посредство теории мнимых величин. А те, кто изобрел мнимые величины, нисколько и не подозревали, что ими воспользуются для изучения реального мира: на это указывает достаточно ясно самое название этих величин.

Максвелл, быть может, и не был искусным аналитиком, но эта опытность была бы для него бесполезным и стеснительным бременем. Зато он в высшей степени обладал внутренним чувством математических аналогий. Вот почему он стал хорошим математическим физиком.

Пример Максвелла учит нас еще и другому.

Как следует нам обращаться с уравнениями математической физики? Должны ли мы просто выводить из них все следствия и рассматривать их как неощущаемые реальности? Нет, далеко не так. Главным образом они должны нас учить тому, что можно и что следует в них изменять. Только таким образом мы можем извлечь из них что-либо полезное.

Третий пример покажет нам, каким образом можем мы заметить математические аналогии в ряду явлений, с физической точки зрения не состоящих ни в кажущемся, ни в реальном соотношении такого рода, чтобы законы одного из этих явлений помогали нам догадываться о законах другого.

Одно и то же уравнение Лапласа встречается в теориях ньютоновского тяготения, движения жидкостей, электрического потенциала, в теории магнетизма, в теории теплопроводности и еще во многих других.

Что отсюда следует? Эти теории кажутся изображениями, скопированными одно с другого; они взаимно освещают одна другую, заимствуя друг у друга свой язык. Спросите у специалистов по теории электричества, не радуются ли они изобретению понятия о силовом потоке, внушенного гидродинамикой и теорией теплоты. Итак, математические аналогии не только дают нам возможность предчувствовать физические аналогии, но не перестают быть полезными и в том случае, когда последние оказываются ошибочными.

Резюмируем сказанное. Цель математической физики заключается не только в том, чтобы облегчить физику вычисление некоторых постоянных или интегрирование некоторых дифференциальных уравнений. Она состоит еще в том, чтобы знакомить физика со скрытой гармонией вещей, показывая их ему под новым углом зрения.

Из всех сторон анализа наиболее возвышенны, наиболее, так сказать, прозрачны как раз те, которые будут наиболее плодотворны в руках, умеющих ими пользоваться.

III

Посмотрим теперь, чем анализ обязан физике.

Нужно было бы окончательно забыть историю науки, чтобы не помнить, что стремление познать природу имело самое постоянное и самое счастливое влияние на развитие математики.

Во-первых, физик ставит перед нами проблемы, решения которых он ждет от нас. Но задавая нам эти проблемы, он тем самым уже щедро оплачивает услугу, которую мы ему можем оказать, если нам удастся их разрешить.

Я позволю себе продолжить сравнение с изящными искусствами. Если бы чистый математик забыл о существовании внешнего мира, то он уподобился бы художнику, который умеет гармонически сочетать краски и формы, но у которого нет моделей. Его творческая сила скоро иссякла бы.

Числа и символы могут образовать бесконечное множество сочетаний. Как нам выбрать из этого множества те сочетания, которые заслуживали бы нашего внимания? Подчинимся ли мы исключительно руководству нашей прихоти? Эта прихоть, которая к тому же сама скоро выдохлась бы, увлекла бы нас, без сомнения, далеко друг от друга, и мы скоро перестали бы понимать друг друга.

Но это еще менее важная сторона вопроса.

Физика, без сомнения, помешает нам впасть в заблуждение, но она предохранит нас от еще более грозной опасности; она воспрепятствует нам безостановочно вращаться в одном и том же кругу. История показывает, что физика не только побуждала нас к выбору из целого множества представлявшихся нам проблем; она также ставила перед нами такие проблемы, о которых мы без нее никогда и не подумали бы.

Как ни разнообразна фантазия человека, природа еще в тысячу раз богаче. Чтобы следовать за нею, нам приходится вступать на пути, на которые мы не обращали внимания; а эти пути приводят нас часто к вершинам, откуда мы открываем новые кругозоры. Что может быть более полезно!

О математических символах можно сказать то же, что о физических реальностях. Только сравнивая различные стороны вещей, мы будем в состоянии понять их внутреннюю гармонию, которая одна только прекрасна и, следовательно, достойна наших трудов.

Первый пример, какой я приведу, настолько стар, что могло бы явиться искушение его забыть. Тем не менее он важнее всех прочих.

Единственный естественный предмет математической мысли есть целое число. Непрерывность была внушена нам внешним миром. Она, без сомнения, изобретена нами, но изобрести ее нас вынудил внешний мир.

Без него не было бы анализа бесконечно малых. Все математическое знание свелось бы к арифметике или к теории подстановок.

Но мы, напротив, посвятили изучению непрерывности почти все наше время, почти все наши силы. Кто пожалеет об этом? Кто станет считать, что это время и эти силы были потеряны?

Анализ развертывает перед нами безграничные перспективы, о которых не подозревает арифметика. Он показывает нам с одного взгляда грандиозный ансамбль, распорядок которого прост и симметричен, напротив того — в теории чисел, где царит непредвиденность, взор встречает препятствия на каждом шагу.

Вам, без сомнения, скажут, что вне целого числа нет строгости, а следовательно, нет математической истины, что оно скрывается всюду и что нужно стараться разоблачить его покровы, хотя бы для этого пришлось обречь себя на нескончаемые повторения.

Но мы не будем столь строги; мы будем признательны непрерывности, которая, если даже *всё* исходит из целого числа, одна только была способна извлечь из него *так много*.

Нужно ли напоминать, как Эрмит получил поразительные результаты от введения непрерывных переменных в теорию чисел? Таким образом, подверглась вторжению область целого числа в собственном смысле, и это вторжение водворило порядок в царстве хаоса.

Всем этим мы обязаны непрерывности, а следовательно, физической природе.

Ряд Фурье является ценным инструментом, постоянно употребляемым в анализе. Благодаря именно этому средству оказалось возможным изображать прерывные функции. Но Фурье изобрел его, имея целью решение одной физической проблемы, касающейся распространения тепла. Если бы не была естественным образом поставлена эта проблема, никогда бы не решились отдать должное прерывности и долго бы еще смотрели на непрерывные функции как на единственные истинные функции.

Благодаря этому понятие функции значительно расширилось и получило у некоторых аналитиков-логиков непредвиденное развитие.

Эти аналитики пустились в области, где царствует наиболее чистая абстракция, и удалились от реального мира настолько, насколько это возможно. Однако повод к этому им был доставлен физической проблемой.

Вслед за рядом Фурье в область анализа вошли другие аналогичные ряды. Они вошли в ту же дверь: они были придуманы в прикладных целях.

Теория уравнений второго порядка с частными производными имела подобную же историю. Она развивалась главным образом через физику и для нее. Она может принимать множество форм, ибо для определения неизвестной функции недостаточно одного подобного уравнения: необходимо добавить дополнительные так называемые граничные условия; отсюда вытекает много разных проблем. Если бы аналитики предались своим естественным стремлениям, они знали бы из них только одну — ту самую, которая рассмотрена Софьей Ковалевской в ее знаменитом мемуаре[1]). Все множество других проблем осталось бы неизвестным.

Каждая физическая теория — теория электричества, теория теплоты — представляет нам эти уравнения под новым видом. Итак, можно сказать, что без них мы не знали бы уравнений с частными производными.

Бесполезно было бы множить примеры. Сказанного достаточно, чтобы вывести такое заключение: когда физики требуют от нас решения проблемы, они не бремя возлагают на нас, но, напротив, заслуживают нашей благодарности.

IV

Но это не все. Физика не только дает нам повод к решению проблем; она еще помогает нам найти к этому средства. Это происходит двояким путем.

Во-первых, она дает нам предчувствие решения; во-вторых, подсказывает нам ход рассуждений.

Выше я уже говорил об уравнении Лапласа, которое встречается во множестве весьма далеких друг от друга физических теорий. Его же находим мы в геометрии (в теории конформного преобразования) и в чистом анализе (в теории мнимых величин).

Таким образом, аналитик, изучающий функции комплексных переменных, кроме обычного своего орудия — геометрического представления, — находит ряд физических образов, которые он может использовать с таким же успехом.

Благодаря этим образам он в состоянии сразу видеть то, что было бы лишь постепенно обнаружено путем чистой дедукции. Так, он соединяет разрозненные элементы решения и путем некоторого рода интуиции

---

[1]) Вероятно, имеется в виду мемуар Софьи Ковалевской, посвященный вращению твердого тела вокруг фиксированной точки, за который Парижская Академия наук присудила ей в 1888 г. премию Бордена. Позднее этой проблеме были посвящены труды С. А. Чаплыгина, Н. Е. Жуковского, Леви-Чивита и др.

Перевод мемуара опубликован в книге «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки» (М.; Л., 1940), посвященной памяти С. В. Ковалевской. См. также: Ковалевская С. В. Научные работы. — М., 1948. — *Примеч. ред.*

догадывается о том, что будет доказано лишь впоследствии.

Догадка предшествует доказательству! Нужно ли указывать, что именно так были сделаны все важные открытия?

Сколько истин позволяют нам предчувствовать физические аналогии, оправдать которые путем строгого рассуждения мы были бы не в состоянии!

Вот пример. Математическая физика употребляет множество разложений в ряды. Никто не сомневается в сходимости этих рядов, несмотря на отсутствие математической достоверности. Будущие исследователи одержат здесь несомненные победы.

С другой стороны, физика дает нам не только решения; в известной мере она дает нам и метод рассуждения. Достаточно напомнить, как Клейн воспользовался свойствами электрических токов при исследовании одного вопроса, относящегося к поверхностям Римана. Правда, рассуждения этого рода не строги в том смысле, в каком термин «строгость» употребляется аналитиками.

В связи с этим можно поставить вопрос: как может физик удовлетворяться доказательством, которое не достаточно строго с точки зрения аналитика?

По-видимому, не может быть двух степеней строгости; либо строгость налицо, либо ее нет; там, где ее нет, не может быть и умозаключения. Мы лучше поймем этот кажущийся парадокс, вспомнив те условия, при которых число находит применение к явлениям природы.

В чем, вообще говоря, источник затруднений, с которыми встречаются требования точности? На них почти всегда натыкаются в то время, когда хотят доказать, что такая-то величина стремится к такому-то пределу или что известная функция непрерывна, или что она имеет производную.

Но числа, которые физик измеряет в опыте, всегда бывают известны ему лишь приближенно; с другой стороны, произвольная функция всегда сколь угодно мало отличается от некоторой прерывной функции, и в то же время она также сколь угодно мало отличается от непрерывной функции.

Поэтому физик может по произволу предполагать изучаемую функцию прерывной или непрерывной, имеющей производную или не имеющей ее; у него нет оснований опасаться стать в противоречие с каким бы то ни было опытом, ни современным, ни будущим. При такой свободе он, понятно, смеется над трудностями, удерживающими аналитика.

Он всегда может рассуждать так, как если бы все функции, входящие в его выкладки, были целыми многочленами.

Итак, беглый взгляд, достаточный для физики, не есть то умозаключение, к которому стремится анализ. Отсюда не следует, что первый не был в состоянии помочь отыскать второе. В форму строгих доказательств превращено столь много физических заключений, что теперь это превращение делается легко. Я мог бы привести множество примеров, если бы не опасался утомить внимание читателя.

Я надеюсь, что мною сказано достаточно для оправдания мысли: чистый анализ и математическая физика могут приносить друг другу пользу без какой-либо жертвы со своей стороны; каждая из этих наук должна радоваться всякому возвышению другой.

Глава VI

АСТРОНОМИЯ

Правительства и парламенты должны считать астрономию одной из самых дорогих наук: самый малый инструмент стоит сотни тысяч франков, самая небольшая обсерватория — миллионы; каждое затмение влечет за собой дополнительные кредиты. И все это — ради светил, которые так далеки, которые совершенно чужды нашим избирательным распрям и, вероятно, никогда не примут в них никакого участия. Для этого нашим политическим деятелям надо сохранять остатки идеализма, смутное влечение к величественному. По правде говоря, я думаю, что на них немало клевещут. Следует ободрить их, показать им ясно, что этот инстинкт не обманывает их, что они не обмануты своим идеализмом.

Можно было бы, конечно, рассказать им о морском деле, важность которого признается всеми и для которого необходима астрономия. Но это значило бы