Часть I

ЧИСЛО И ВЕЛИЧИНА

Глава I

О ПРИРОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

I

Самая возможность математического познания кажется неразрешимым противоречием. Если эта наука является дедуктивной только по внешности, то откуда у нее берется та совершенная строгость, которую никто не решается подвергать сомнению? Если, напротив, все предложения, которые она выдвигает, могут быть выведены один из других по правилам формальной логики, то каким образом математика не сводится к бесконечной тавтологии? Силлогизм не может нас научить ничему существенно новому, и если все должно вытекать из закона тождества, то все также должно к нему и приводиться. Но неужели возможно допустить, что изложение всех теорем, которые заполняют столько томов, есть не что иное, как замаскированный прием говорить, что A есть A!

Конечно, можно добраться до аксиом, которые лежат в источнике всех этих рассуждений. И если, с одной стороны, держаться того мнения, что их нельзя свести к закону противоречия, с другой — не желать видеть в них только факты опыта, которые не могли бы обладать характером математической необходимости, то имеется еще надежда отнести их к числу синтетических априорных суждений. Но это не значит разрешить затруднение; это значит только дать ему название: даже если бы природа синтетических суждений перестала быть для нас тайной, все же противоречие не было бы устранено, оно было бы только отодвинуто; силлогистическое умозаключение неспособно прибавить что-либо к тем данным, которые ему предоставляются; эти данные сводятся к нескольким аксиомам, и, кроме них, ничего нового нельзя было бы найти в заключениях.

Никакая теорема не должна была бы являться новой, если в ее доказательство не входила бы новая аксиома; умозаключение могло бы только возвращать нам истины, непосредственно очевидные, имеющие источником интуицию; оно являлось бы только промежуточным пустословием. Тогда, пожалуй, возник бы вопрос: не служит ли вообще силлогистический аппарат единственно для того, чтобы маскировать делаемые нами заимствования?

Противоречие поразит нас еще больше, если мы откроем какую-нибудь математическую книгу: на каждой странице автор будет выражать намерение обобщить уже известную теорему. Значит ли это, что математический метод ведет от частного к общему, и каким образом можно называть его тогда дедуктивным?

Наконец, если бы наука о числе была чисто аналитической или могла вытекать аналитически из небольшого числа синтетических суждений, то достаточно сильный ум мог бы, по-видимому, с первого взгляда заметить все содержащиеся в них истины; более того: можно было бы даже надеяться, что когда-нибудь для их выражения будет изобретен язык настолько простой, что эти истины будут непосредственно доступны и заурядному уму.

Если отказаться от допущения этих выводов, то необходимо придется признать, что математическое умозаключение само в себе заключает род творческой силы и что, следовательно, оно отличается от силлогизма.

И отличие это должно быть глубоким. Так, например, мы не найдем ключа к тайне в многократном применении того правила, по которому одна и та же операция, одинаково примененная к двум равным числам, дает тождественные результаты.

Все эти формы умозаключения — все равно, приводимы ли они к силлогизму в собственном смысле или нет, — сохраняют аналитический характер и поэтому являются бессильными.

II

Вопросы этого рода обсуждаются давно. Еще Лейбниц пытался доказать, что 2 да 2 составляют 4; рассмотрим вкратце его доказательство.

Я предполагаю, что определены число 1 и операция $x+1$, состоящая в прибавлении 1 к данному числу x. Эти определения, каковы бы они ни были, не будут входить в последующие рассуждения.

Я определяю затем числа 2, 3 и 4 равенствами:

$$(1)\quad 1+1=2; \qquad (2)\quad 2+1=3; \qquad (3)\quad 3+1=4.$$

Я определяю также операцию $x+2$ соотношением

$$(4)\quad x+2=(x+1)+1.$$

Установив это, мы имеем

$$2+2=(2+1)+1 \quad \text{(определение (4))},$$
$$(2+1)+1=3+1 \quad \text{(определение (2))},$$
$$3+1=4 \quad \text{(определение (3))},$$

откуда

$$2+2=4 \text{ (что и требовалось доказать).}$$

Нельзя отрицать того, что это рассуждение является чисто аналитическим. Но спросите любого математика, и он вам скажет: «Это, собственно говоря, не доказательство, а проверка». Мы просто ограничились сближением двух чисто условных определений и констатировали их тождество; ничего нового мы не узнали. *Проверка* тем именно и отличается от истинного доказательства, что, будучи чисто аналитической, она остается бесплодной. Она бесплодна, потому что заключение есть только перевод предпосылок на другой язык. Истинное же доказательство, наоборот, плодотворно, ибо в нем заключение является в некотором смысле более общим, чем посылки.

Равенство $2+2=4$ могло подлежать проверке только потому, что оно является частным случаем. Всякое частное выражение в математике всегда может быть таким образом проверено. Но если бы математика должна была сводиться к ряду таких проверок, то она не была бы наукой. Ведь шахматист, например, не создает еще науки тем, что он выигрывает партию. Всякая наука есть наука об общем.

Можно даже сказать, что точные науки имеют своей задачей избавить нас от необходимости таких прямых проверок.

III

Итак, посмотрим на математика за его делом и постараемся объяснить себе успешность его приемов. Задача эта не лишена трудностей; недостаточно открыть случайно попавшееся сочинение и проанализировать там какое-нибудь доказательство.

Мы должны прежде всего исключить геометрию, где вопрос усложняется трудными задачами, относящимися к роли постулатов, к природе и к происхождению понятия пространства. По аналогичным основаниям мы не можем обращаться и к анализу бесконечно малых. Нам надо искать математическую мысль там, где она осталась чистой, т. е. в арифметике.

Надо еще продолжить отбор; в высших отделах теории чисел первоначальные математические понятия подверглись столь глубокой разработке, что становится трудно их анализировать.

Следовательно, именно в началах арифметики мы должны надеяться найти искомое объяснение; но как раз в доказательстве наиболее элементарных теорем авторы классических сочинений обнаружили меньше всего точности и строгости. Не надо ставить им это в вину; они подчинялись необходимости; начинающие не подготовлены к настоящей математической строгости; они усмотрели бы в ней только пустые и скучные тонкости; было бы бесполезной тратой времени пытаться скорее внушить им бо́льшую требовательность; надо, чтобы они быстро, без остановок, прошли путь, который некогда медленно проходили основатели науки.

Почему же нужна столь продолжительная подготовка, чтобы привыкнуть к этой совершенной строгости, которая, кажется, должна была бы быть от природы присущей всякому нормальному уму? Это логическая и психологическая проблема, которая достойна обсуждения.

Но мы не будем останавливаться на ней; она является посторонней для нашего предмета. Я буду лишь помнить, что нам надо, из опасения не достигнуть цели, привести заново доказательства наиболее элементарных теорем и вместо той грубой формы, которую им придают, чтобы не утомить начинающих, придать такую, которая может удовлетворить ученого-математика.

Определение сложения. Я предполагаю, что предварительно была определена операция $x+1$, состоящая в прибавлении числа 1 к данному числу x. Это определение, каково бы оно ни было, не будет играть никакой роли в последующих рассуждениях.

Дело идет теперь об определении операции $x+a$, состоящей в прибавлении числа a к данному числу x.

Предположим, что определена операция

$$x+(a-1).$$

Тогда операция $x+a$ будет определена равенством

$$x+a=[x+(a-1)]+1. \qquad (1)$$

Таким образом, мы узна́ем, что такое $x+a$, когда будем знать, что такое $x+(a-1)$; а так как я вначале предположил, что известно, что такое $x+1$, то можно определить последовательными «рекурренциями» операции $x+2$, $x+3$ и т. д.[1])

Это определение заслуживает некоторого внимания, так как оно имеет особенную природу, отличающую его от определения чисто логического; в самом деле, равенство (1) содержит бесчисленное множество различных определений, и каждое из них имеет смысл только тогда, когда известно другое, ему предшествующее.

Свойства сложения. *Ассоциативность.* Я утверждаю, что

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

В самом деле, теорема справедлива для $c=1$; в этом случае она изображается равенством

$$a+(b+1)=(a+b)+1.$$

[1]) Термином «рекурренция» (recurrence) обозначается логическая операция возврата к своему началу. — *Примеч. ред.*

А это — помимо различия в обозначениях — есть не что иное, как равенство (1), при помощи которого я только что определял сложение.

Предположим, что теорема будет справедлива для $c = \gamma$; я говорю, что она будет справедлива и для $c = \gamma + 1$; пусть, в самом деле,

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma);$$

отсюда следует

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1$$

или в силу определения (1)

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)],$$

а это показывает с помощью ряда чисто аналитических выводов, что теорема верна для $\gamma + 1$.

Но так как она верна для $c = 1$, то последовательно усматриваем, что она верна для $c = 2$, для $c = 3$ и т. д.

Коммутативность. 1. Я утверждаю, что

$$a + 1 = 1 + a.$$

Теорема, очевидно, справедлива для $a = 1$; путем чисто аналитических рассуждений можно проверить, что если она справедлива для $a = \gamma$, то она будет справедлива для $a = \gamma + 1$; но раз она справедлива для $a = 1$, то она будет справедлива и для $a = 2$, для $a = 3$ и т. д.; это выражают, говоря, что высказанное предложение доказано путем рекурренции.

2. Я утверждаю, что

$$a + b = b + a.$$

Теорема только что была доказана для $b = 1$; можно аналитически *проверить*, что если она справедлива для $b = \beta$, то она будет справедлива для $b = \beta + 1$.

Таким образом, предложение доказано путем рекурренции.

Определение умножения. Мы определим умножение при помощи равенств

$$a \times 1 = a,$$

$$a \times b = [a \times (b - 1)] + a. \qquad (2)$$

Равенство (2), как и равенство (1), заключает в себе бесчисленное множество определений; после того как дано определение $a \times 1$, оно позволяет определить последовательно $a \times 2$, $a \times 3$ и т. д.

Свойства умножения. *Дистрибутивность.* Я утверждаю, что

$$(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

Мы проверяем аналитически справедливость этого равенства для $c = 1$; а потом проверяем, что если теорема справедлива для $c = \gamma$, то она будет справедлива и для $c = \gamma + 1$.

Предложение опять доказано рекурренцией.

Коммутативность. 1. Я утверждаю, что

$$a \times 1 = 1 \times a.$$

Теорема очевидна для $a = 1$.

Проверяем аналитически, что если она справедлива для $a = \alpha$, то она будет справедлива и для $a = \alpha + 1$.

2. Я утверждаю, что

$$a \times b = b \times a.$$

Теорема только что была доказана для $b = 1$. Аналитически проверяем, что если она справедлива для $b = \beta$, то она будет справедлива и для $b = \beta + 1$.

IV

Здесь я прерываю этот монотонный ряд рассуждений. Но именно эта монотонность и способствовала лучшему выделению того однообразного процесса, который мы находим на каждом шагу.

Этот процесс есть доказательство путем рекурренции. Сначала формулируется теорема для $n = 1$; потом доказывается, что если она справедлива для $n - 1$, то она справедлива и для n, и отсюда выводится заключение о справедливости ее для всех целых чисел.

Мы только что видели, как можно воспользоваться этим для доказательства правил сложения и умножения, т. е. правил алгебраического вычисления; это вычисление есть орудие преобразования, которое применяется в гораздо большем числе разнообразных комбинаций, чем простой силлогизм; но это орудие еще чисто аналитическое, оно неспособно научить нас ничему новому. Если бы математика не имела ничего другого, она тотчас же остановилась бы в своем развитии; но она получает новое средство в том же процессе, т. е. в рассуждении путем рекурренции, и потому может непрерывно продолжать свое поступательное движение.

В каждом шаге, если его хорошенько рассмотреть, мы находим этот способ рассуждения — или в той простой форме, которую мы только что ему придали, или в форме более или менее видоизмененной.

В нем, следовательно, по преимуществу заключается математическое рассуждение, и нам следует изучить его ближе.

V

Существенная черта умозаключения путем рекурренции заключается в том, что оно содержит в себе бесчисленное множество силлогизмов, сосредоточенных, так сказать, в одной формуле.

Чтобы лучше можно было себе это уяснить, я сейчас расположу эти силлогизмы один за другим в виде некоторого каскада. Это, в сущности,— гипотетические силлогизмы.

Теорема верна для числа 1.

Если же она справедлива для 1, то она справедлива для 2.

Следовательно, она верна для 2.

Если же она верна для 2, то она верна для 3.

Следовательно, она верна для 3 и т. д.

Очевидно, что заключение каждого силлогизма служить следующему меньшей посылкой.

Бóльшие посылки всех наших силлогизмов могут быть приведены к одной формуле:

Если теорема справедлива для $n - 1$,
то она справедлива для n.

Таким образом, очевидно, что в рассуждении путем рекурренции ограничиваются выражением меньшей посылки первого силлогизма и общей формулы, которая в виде частных случаев содержит в себе все бóльшие посылки.

Этот никогда не оканчивающийся ряд силлогизмов оказывается приведенным к одной фразе в несколько строк.

Теперь легко понять, почему всякое частное следствие, вытекающее из теоремы, может быть, как я изложил выше, проверено чисто аналитическим процессом.

Если, вместо того чтобы доказывать справедливость нашей теоремы для всех чисел, мы желаем обнаружить ее справедливость, например, только для числа 6, для нас будет достаточно обосновать 5 первых силлогизмов нашего последовательного ряда; если бы мы пожелали доказать теорему для числа 10, надо было бы взять их 9; для большого числа надо было бы взять их еще больше; но как бы велико ни было это число, мы всегда в конце концов его достигли бы, и аналитическая проверка была бы возможна.

Однако как бы далеко мы ни шли, мы никогда не могли бы дойти до общей применимой ко всем числам теоремы, которая одна только и может быть предметом науки. Чтобы ее достигнуть, понадобилось бы бесконечно большое число силлогизмов — нужно перескочить бездну, которую никогда не будет в состоянии заполнить терпение аналитика, ограниченное одними средствами формальной логики.

Вначале я поставил вопрос, почему нельзя было бы вообразить ум, достаточно мощный для того, чтобы сразу подметить всю совокупность математических истин.

Ответ теперь нетруден; шахматный игрок может рассчитать вперед четыре, пять ходов, но, каким бы необыкновенным его ни представляли, он всегда предусмотрит только конечное число ходов; если он применит свои способности к арифметике, то он не будет в состоянии подметить в ней общих истин путем одной непосредственной интуиции; он не будет в состоянии обойтись без помощи рассуждения путем рекурренции при доказательстве самой незначительной теоремы, ибо это и есть то орудие, которое позволяет переходить от конечного к бесконечному.

Это орудие всегда полезно, ибо оно позволяет нам сразу пройти любое число ступеней и избавляет нас от долгих, скучных и однообразных проверок, которые скоро стали бы практически невыполнимыми.

Но оно делается неизбежным, раз мы имеем в виду общую теорему, к которой аналитическая проверка нас непрерывно приближала бы, никогда не позволяя ее достигнуть.

В этой области арифметики кто-нибудь, пожалуй, счел бы себя далеким от анализа бесконечно малых; между тем мы сейчас видели, что идея математической бесконечности уже здесь играет весьма важную роль, и без нее не было бы арифметики как науки, так как не было бы идеи общего.

VI

Суждение, на котором основан способ рекурренций, может быть изложено в других формах; можно сказать, например, что в бесконечно большом собрании различных целых чисел всегда есть одно, которое меньше всех других. Можно легко переходить от одного выражения к другому и таким образом создавать иллюзию доказательства законности рассуждения путем рекурренции. Но в конце концов всегда придется остановиться; мы всегда придем к недоказуемой аксиоме, которая, в сущности, будет не что иное, как предложение, подлежащее доказательству, но только переведенное на другой язык.

Таким образом, нельзя не прийти к заключению, что способ рассуждения путем рекурренции несводим к закону противоречия.

Это правило не может происходить и из опыта; опыт нас может научить только тому, что это правило справедливо, например, для 10, для 100 первых чисел; он не может простираться на бесконечный ряд чисел, а лишь на бо́льшую или меньшую часть этого ряда, всегда ограниченную.

Если бы дело шло только об этом, закон противоречия был бы достаточен — он всегда позволил бы нам развить столько силлогизмов, сколько мы желаем; лишь когда дело идет об охвате бесконечности одной формулой, лишь перед бесконечным рушится этот закон; но там становится бессилен и опыт. Это правило, недоступное ни для аналитического, ни для опытного доказательства, есть истинный образец синтетического априорного суждения. С другой стороны, нельзя видеть в нем только соглашение, как в некоторых постулатах геометрии.

Почему же это суждение стоит перед нами с непреодолимой очевидностью? Здесь сказывается только утверждение могущества разума, который способен постичь бесконечное повторение одного и того же акта, раз этот акт оказался возможным однажды. В силу этого могущества разум обладает непосредственной интуицией, а опыт может быть для него только поводом воспользоваться ею и осознать ее.

Но скажут: если чистый опыт не может оправдать суждения путем рекурренции, то будет ли то же самое относительно опыта, поддерживаемого индукцией? Мы последовательно видим, что теорема верна для чисел 1, 2, 3 и т. д.; мы говорим: *закон очевиден*, и присваиваем ему тот же ранг, какой свойствен всякому физическому закону, опирающемуся на наблюдения, число которых очень велико, но все же ограничено.

Нельзя не признать, что здесь существует поразительная аналогия с обычными способами индукции. Однако есть и существенное различие. Индукция, применяемая в физических науках, всегда недостоверна, потому что она опирается на веру во всеобщий порядок Вселенной — порядок, который находится вне нас. Индукция математическая, т. е. доказательство путем рекурренции, напротив, представляется с необходимостью, потому что она есть только подтверждение одного из свойств самого разума.

VII

Выше я сказал, что математики стараются всегда *обобщать* полученные ими предложения; например, мы только что доказали равенство

$$a+1=1+a,$$

а затем воспользовались им для обоснования равенства

$$a+b=b+a,$$

которое, очевидно, является более общим.

Таким образом, математика, как и другие науки, может идти от частного к общему.

Это — факт, который в начале этого сочинения казался нам непонятным, но который теряет всю таинственность для нас, после того как была установлена аналогия между доказательством путем рекурренции и между обычной индукцией.

Нет сомнения, что математическое рассуждение посредством рекурренции и индуктивное физическое рассуждение покоятся на различных основаниях; но ход их параллелен — они движутся в том же направлении, т. е. от частного к общему.

Рассмотрим это несколько ближе. Чтобы доказать равенство

$$a+2=2+a,$$

нам достаточно применить два раза правило

$$a+1=1+a \tag{1}$$

и написать

$$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a. \tag{2}$$

Однако равенство (2), выведенное таким образом чисто аналитически из равенства (1), не есть просто его частный случай: это нечто иное.

Поэтому нельзя сказать, что мы даже в действительно аналитической и дедуктивной части математических рассуждений двигались от общего к частному в обычном смысле слова.

Два члена равенства (2) суть просто сочетания, более сложные, чем два члена равенства (1), и анализ служит только для отделения элементов, которые входят в эти сочетания, и для изучения их соотношений.

Следовательно, математики действуют, применяя процесс «конструирования»; они «конструируют» сочетания все более и более сложные. Возвращаясь затем путем анализа этих сочетаний — этих, так сказать, совокупностей — к их первоначальным элементам, они раскрывают отношения этих элементов и выводят отсюда отношения самих совокупностей.

Это — процесс чисто аналитический, однако он направлен не от общего к частному, ибо совокупности, очевидно, не могут быть рассматриваемы как нечто более частное, чем их составные элементы.

Этому процессу «конструирования» справедливо приписывали большое значение и желали в нем видеть необходимое и достаточное условие прогресса точных наук.

Несомненно, что оно необходимо; но оно не является достаточным.

Для того чтобы конструирование могло быть полезным, чтобы оно не было бесплодным трудом для разума, чтобы оно могло служить опорой для дальнейшего поступательного движения, надо, чтобы оно прежде всего обладало некоторым родом единства, которое позволяло бы видеть в нем нечто иное, чем простое наращивание составных частей. Говоря точнее, надо, чтобы в анализе конструкции выявлялось некоторое преимущество сравнительно с анализом ее составных элементов.

В чем же может заключаться это преимущество?

Зачем, например, надо рассуждать не об элементарных треугольниках, а о многоугольнике, который ведь всегда разложим на треугольники?

Это делается потому, что существуют свойства, принадлежащие многоугольникам с каким угодно числом сторон, которые можно непосредственно применить к любому частному многоугольнику.

Весьма часто, напротив, только ценой продолжительных усилий можно бывает найти эти свойства, изучая непосредственно соотношения элементарных треугольников. Знание общей теоремы освобождает нас от этих усилий.

Если четырехугольник есть не что иное, чем соединенные рядом два треугольника, то это потому, что он принадлежит к роду многоугольников.

Конструирование становится интересным только тогда, когда его можно сравнить с другими аналогичными конструкциями, образующими виды того же родового понятия.

Необходимо еще, чтобы было возможно доказывать родовые свойства, не будучи вынужденным обосновывать их последовательно для каждого вида.

Чтобы достигнуть этого, необходимо вновь подняться от частного к общему, пройдя одну или несколько ступеней.

Аналитический процесс «конструирования» не вынуждает нас опускаться ниже, а оставляет все на том же уровне.

Мы можем подняться выше только благодаря математической индукции, которая одна может научить нас чему-либо новому. Без помощи такой индукции, отличной в известных отношениях от индукции физической, но столь же плодотворной, как и последняя, процесс конструирования был бы бессилен создать науку.

Заметим, наконец, что эта индукция возможна только тогда, когда одна и та же операция может повторяться бесконечное число раз. Вот причина, почему теория шахматной игры никогда не может стать наукой; там различные ходы одной и той же партии не похожи друг на друга.

Глава II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ОПЫТ

Если вы хотите знать, что понимают математики под непрерывностью, то ответа следует спрашивать не у геометра. Геометр всегда так или иначе старается представить себе фигуры, которые он изучает, но его представления являются для него только орудием; занимаясь геометрией, он употребляет пространство так же, как употребляет мел; поэтому следует остерегаться приписывать слишком большое значение случайностям, которые часто имеют не больше значения, чем белизна мела.

Чистому аналитику нечего бояться этой опасности. Он освободил математическую науку от всех посторонних элементов и может ответить на ваш вопрос: что представляет собой на самом деле та непрерывность, о которой рассуждают математики? Многие из них, умеющие размышлять о своей науке, уже сделали это, как например Таннери в своем «Введении в теорию функций одной переменной».

Будем исходить из последовательности целых чисел; между двумя соседними числами вставим одно или несколько промежуточных чисел, потом между этими числами вставим еще новые и так далее до бесконечности. Мы будем иметь, таким образом, неограниченное число членов: это будут числа, называемые дробно-рациональными или соизмеримыми. Но этого еще недостаточно; между этими членами,