Мы можем подняться выше только благодаря математической индукции, которая одна может научить нас чему-либо новому. Без помощи такой индукции, отличной в известных отношениях от индукции физической, но столь же плодотворной, как и последняя, процесс конструирования был бы бессилен создать науку.

Заметим, наконец, что эта индукция возможна только тогда, когда одна и та же операция может повторяться бесконечное число раз. Вот причина, почему теория шахматной игры никогда не может стать наукой; там различные ходы одной и той же партии не похожи друг на друга.

Глава II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ОПЫТ

Если вы хотите знать, что понимают математики под непрерывностью, то ответа следует спрашивать не у геометра. Геометр всегда так или иначе старается представить себе фигуры, которые он изучает, но его представления являются для него только орудием; занимаясь геометрией, он употребляет пространство так же, как употребляет мел; поэтому следует остерегаться приписывать слишком большое значение случайностям, которые часто имеют не больше значения, чем белизна мела.

Чистому аналитику нечего бояться этой опасности. Он освободил математическую науку от всех посторонних элементов и может ответить на ваш вопрос: что представляет собой на самом деле та непрерывность, о которой рассуждают математики? Многие из них, умеющие размышлять о своей науке, уже сделали это, как например Таннери в своем «Введении в теорию функций одной переменной».

Будем исходить из последовательности целых чисел; между двумя соседними числами вставим одно или несколько промежуточных чисел, потом между этими числами вставим еще новые и так далее до бесконечности. Мы будем иметь, таким образом, неограниченное число членов: это будут числа, называемые дробно-рациональными или соизмеримыми. Но этого еще недостаточно; между этими членами, число которых однако уже бесконечно, надо вставить еще другие, так называемые иррациональные или несоизмеримые.

Прежде чем идти дальше, сделаем одно важное замечание. Непрерывность, понимаемая таким образом, есть не более чем собрание отдельных единиц, расположенных в известном порядке, правда, в бесконечном числе, но *внешних* друг другу. Это не соответствует обычной концепции, которая между элементами непрерывного предполагает некоторый род внутренней связи, составляющей из них целое,— где не точка предшествует существованию линии, а линия предшествует существованию точки. От знаменитой формулы: непрерывность есть единство во множественности — остается только множественность; единство исчезло. Это обстоятельство не лишает аналитиков основания определять свою непрерывность так, как они это делают, ибо, рассуждая именно об этом, они постоянно спорят друг с другом по поводу строгости. Но для нас достаточно указать, что настоящая математическая непрерывность есть нечто совсем иное, чем непрерывность физиков или непрерывность метафизиков.

Быть может, скажут, что математики, которые довольствуются этим определением, обмануты словами, что надо было бы точно сказать, что представляет собой каждый из промежуточных членов, выяснить, как надо их вставить, и показать, что эта операция возможна. Но это было бы несправедливо; единственным свойством этих членов, входящим в рассуждения о них[1]), является свойство находиться прежде или после таких-то других членов; поэтому оно только и должно входить в их определение.

Таким образом, нечего беспокоиться о том, каким способом следует вставлять промежуточные члены; с другой стороны, никто не усомнится, что эта операция возможна, если только не забывать, что это последнее слово на математическом языке означает просто: свободна от противоречия.

Все же наше определение непрерывности не полно, и я возвращаюсь к нему после этого слишком длинного отступления.

[1]) Сюда входят специальные соглашения, служащие для определения сложения; о них мы будем говорить ниже.

Определение несоизмеримых величин. Математики Берлинской школы, и в частности Кронекер, занимаются построением этой непрерывной последовательности дробных и иррациональных чисел, не пользуясь никаким другим материалом, кроме целого числа. С этой точки зрения математическая непрерывность явится чистым созданием разума, в котором опыт совершенно не участвует.

Понятие рационального числа для них не представляет затруднения; предметом их особенных усилий служит определение несоизмеримого числа. Но прежде чем воспроизвести здесь это определение, я должен сделать одно замечание, чтобы предупредить удивление, которое оно не замедлило бы вызвать у читателей, мало знакомых с математическими обычаями.

Математики изучают не предметы, а лишь отношения между ними; поэтому для них безразлично, будут ли одни предметы замещены другими, лишь бы только не менялись их отношения. Для них не важно материальное содержание; их интересует только форма.

Кто забудет это, тот не поймет, что Дедекинд под именем *несоизмеримого числа* разумеет простой символ, т. е. нечто, совершенно отличное от представления, которое создают себе обыкновенно относительно величины, считая ее измеряемой, почти осязаемой.

Итак, вот каково определение Дедекинда: *соизмеримые числа могут быть бесконечным числом способов распределены на два класса при соблюдении условия, что любое число первого класса должно быть больше любого числа второго класса.*

Может случиться, что между числами первого класса будет одно, которое меньше всех других; например, если поместим в первый класс все числа, бóльшие чем 2, и само 2, а во второй класс — все числа, меньшие чем 2, то ясно, что 2 будет наименьшее из всех чисел первого класса. Число 2 может быть принято в качестве символа этого распределения.

Можно представить себе, напротив, что между числами второго класса имеется одно, большее всех других; так, это имеет место, если первый класс заключает все числа, бóльшие чем 2, а второй — все числа, меньшие чем 2, и само 2. Здесь опять число 2 могло бы быть избрано как символ этого распределения.

Но может также случиться, что нельзя будет найти ни в первом классе число, меньшее чем все другие, ни во втором — число, большее чем все другие. Предположим, например, что в первом классе помещают все соизмеримые числа, квадрат которых больше чем 2, а во втором все те, квадрат которых меньше чем 2. Известно, что нет такого числа, квадрат которого в точности был бы равен 2. И в первом классе не будет, очевидно, числа, меньшего чем все другие, потому что, как бы ни был квадрат некоторого числа близок к 2, всегда можно найти соизмеримое число, квадрат которого будет еще ближе к 2.

С точки зрения Дедекинда, несоизмеримое число

$$\sqrt{2}$$

есть не что иное, как символ этого особого способа распределения соизмеримых чисел; таким образом, каждому способу распределения соответствует одно число — соизмеримое или несоизмеримое,— которое и служит символом распределения.

Но удовольствоваться этим значило бы совсем забыть о происхождении этих символов; остается еще выяснить, каким образом математики пришли к тому, что приписали им особого рода конкретное существование, и, с другой стороны, не появляется ли трудность уже и в отношении дробных чисел? Могли бы мы иметь понятие об этих числах, если бы заранее не знали о материи, которую мы понимаем как нечто делимое до бесконечности, т. е. как непрерывность?

Физическая непрерывность. Итак возникает вопрос, не заимствовано ли понятие математической непрерывности просто из опыта. Если бы это было так, то это означало бы, что данные непосредственного опыта, каковыми являются наши ощущения, доступны измерению.

Может явиться искушение поверить, что это и в самом деле так, потому что в последнее время пытались измерить их, и был даже сформулирован закон, известный под именем закона Фехнера, по которому ощущение пропорционально логарифму раздражения.

Но если ближе присмотреться к опытам, которыми пытались обосновать этот закон, то можно прийти к совершенно противоположному заключению. Например, было замечено, что вес A, равный 10 граммам, и вес B, равный 11 граммам, производят тождественные ощущения, что вес B нельзя отличить от веса C, равного 12 граммам; но что вес A можно легко отличить от веса C. Таким образом, непосредственные результаты опыта могут быть выражены следующими соотношениями:

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C,$$

которые можно рассматривать как формулу физической непрерывности. Эта формула заключает в себе недопустимое разногласие с законом противоречия; необходимость избежать его и заставила нас изобрести идею математической непрерывности.

Итак, необходимо заключить, что это понятие всецело создано разумом, но что опыт доставил ему повод для этого.

Мы не можем допустить, что два количества, равные одному и тому же третьему, не равны между собой; и это обстоятельство вынуждает нас предположить, что A отличается от B и B от C, но несовершенство наших чувств не позволило нам этого заметить.

Создание математической непрерывности. *Первая стадия.* До сих пор, чтобы изобразить действительность, нам достаточно было бы вставить между A и B небольшое число отдельных членов. Но что произойдет, если мы для возмещения несовершенства наших чувств прибегнем к какому-нибудь инструменту, например, если мы воспользуемся микроскопом? Члены A и B, которых ранее мы не могли отличить друг от друга, теперь нам представятся различными; но между A и B, которые стали различимыми, поместится новый член D, который мы не будем в состоянии отличить ни от A ни от B. Несмотря на употребление самых совершенных методов, непосредственные результаты нашего опыта будут всегда сохранять свойства физической непрерывности с присущим ей противоречием.

Мы освободимся от этого противоречия только тем, что будем беспрестанно помещать новые члены между членами, уже *различенными*, и эта операция должна будет продолжаться до бесконечности. Мы могли бы подумать, что она будет остановлена, если мы представим себе некое орудие, достаточно мощное для разложения физической непрерывности на раздельные элементы, подобно тому как телескоп разлагает Млечный Путь на звезды. Но мы не можем так думать. В самом деле, инструментами мы пользуемся всегда при помощи наших чувств; так, увеличенное микроскопом изображение мы рассматриваем нашим глазом, следовательно, оно должно всегда сохранять характер зрительного ощущения, а потому сохранять и характер физической непрерывности.

Длина, рассматриваемая непосредственно, ничем не отличается от половины этой длины, удвоенной микроскопом. Целое однородно с частью; здесь заключается новое противоречие, или скорее это было бы противоречием, если бы число членов предполагалось конечным; в самом деле, ясно, что часть, которая содержит менее членов сравнительно с целым, не может быть подобной целому.

Противоречие снимается лишь тогда, когда число членов рассматривается как бесконечное; ничто, например, не мешает рассматривать совокупность целых чисел подобной совокупности четных чисел, которая представляет собою однако только часть всего ряда; в самом деле, каждому целому числу соответствует в этом ряду одно четное число, которым является то же число, увеличенное вдвое.

Однако разум приходит к созданию понятия о непрерывном, образованном из бесконечного числа членов, не только для того, чтобы избавиться от этого противоречия, содержащегося в эмпирических данных.

Дело обстоит совершенно так же, как для ряда целых чисел. Мы обладаем способностью понять, что единица может быть прибавлена к собранию единиц; благодаря опыту мы имеем повод упражнять эту способность и сознавать ее: но с этого момента мы чувствуем, что наше могущество не имеет предела и что мы могли бы считать бесконечно, хотя бы и имели для счета всегда только конечное число предметов.

Точно так же, как только мы пришли к идее поместить между двумя последовательными членами некоторого ряда промежуточные члены, мы пришли к выводу, что эта операция может быть продолжена беспредельно и что нет, так сказать, никакого существенного основания для остановки.

Я позволю себе упростить речь, назвав математической непрерывностью первого порядка всякую совокупность членов, образованных по тому же закону, что и последовательность соизмеримых чисел. Если мы затем поместим в ней новые промежуточные члены, следуя закону образования несоизмеримых чисел, мы получим то, что мы назовем непрерывностью второго порядка.

Вторая стадия. До сих пор мы сделали только первый шаг: мы объяснили происхождение непрерывностей первого порядка; теперь надо убедиться, почему их было еще недостаточно и почему понадобилось изобретать несоизмеримые числа.

Если мы хотим представить себе линию, то это возможно сделать, только пользуясь свойствами физической непрерывности; т. е. ее можно представить себе не иначе, как обладающей некоторой шириной. Две линии явятся для нас тогда в форме двух узких полос, и если удовольствоваться этим грубым изображением, то очевидно, что при пересечении две линии будут иметь общую часть.

Но чистый геометр делает еще одно усилие: не отказываясь совершенно от помощи своих чувств, он хочет дойти до понятия линии без ширины, точки без протяжения. Он может достичь этого, только рассматривая линию как предел, к которому стремится полоса, все более и более суживающаяся, и точку — как предел, к которому стремится площадь, все более и более уменьшающаяся. Тогда наши две полосы, как бы узки они ни были, всегда будут иметь общую площадь, тем меньшую, чем меньше будет их ширина, и пределом ее будет то, что чистый геометр называет точкой.

Вот почему говорят, что две пересекающиеся линии имеют общую точку, и эта истина представляется интуитивной.

Но она содержала бы противоречие, если бы понимать линии как непрерывности первого порядка, т. е. если на линиях, проводимых геометром, должны находиться только точки, координаты которых — рациональные числа. Противоречие станет очевидным, лишь только установят, например, существование прямых и кругов.

В самом деле, ясно, что если бы в качестве действительных рассматривались только точки с соизмеримыми координатами, то круг, вписанный в квадрат, и диагональ этого квадрата не пересекались бы, потому что координаты точки их пересечения несоизмеримы.

Этого еще недостаточно, потому что таким образом мы имели бы не все несоизмеримые числа, а только некоторые из них.

Но представим себе прямую, разделенную на две полупрямые. Каждая из этих полупрямых явится в нашем воображении как полоса известной ширины; притом эти полосы будут покрывать одна другую, потому что между ними не должно быть никакого промежутка. Когда мы пожелаем воображать наши полосы все более и более узкими, общая часть представится нам точкой, которая будет существовать постоянно; так что мы допустим в качестве интуитивной истины, что если прямая разделена на две полупрямые, то общая граница этих двух прямых есть точка; мы узнаем здесь концепцию Кронекера, согласно которой несоизмеримое число рассматривается как граница, общая двум классам рациональных чисел.

Таково происхождение непрерывности второго порядка, которая и является математической непрерывностью в собственном смысле.

Вывод. В итоге можно сказать, что разум обладает способностью создавать символы; благодаря этой способности он построил математическую непрерывность, *которая представляет собой только особую систему символов.* Его могущество ограничено лишь необходимостью избегать всякого противоречия; однако разум пользуется своей силой исключительно в том случае, когда опыт доставляет ему для этого основание.

В занимающем нас случае этим основанием было понятие физической непрерывности, выведенное из непосредственных данных чувственного восприятия.

Но это понятие приводит к ряду противоречий, от которых надо последовательно освобождаться. Таким образом, мы вынуждены воображать все более и более усложненную систему символов. Та система, на которой мы, наконец, останавливаемся, не только свободна от внутреннего противоречия — ведь она уже оказалась такой на всех пройденных этапах,— но она также не противоречит различным так называемым интуитивным положениям, которые извлечены из более или менее обработанных эмпирических понятий.

Измеримая величина. Величины, изучавшиеся нами до сих пор, не были *измеримыми*, мы умели сказать, которая из двух величин является большей, но в два ли, в три ли раза она больше — этого мы не умели сказать.

В самом деле, до сих пор я занимался только порядком, в котором наши члены были размещены. Но для большинства применений этого недостаточно. Надо научиться сравнивать промежутки, отделяющие два каких-нибудь члена. Только при этом условии непрерывность делается измеримой и в ней оказывается возможным применить арифметические операции.

Это можно сделать только при помощи нового и особого *соглашения. Условливаются*, что в таком-то случае интервал, заключенный между членами A и B, равен интервалу, отделяющему C от D. Так, в начале нашей работы мы исходили из последовательности целых чисел и предполагали, что между двумя последовательными членами ее помещены n промежуточных; эти-то новые члены будут теперь в силу соглашения рассматриваться как равноотстоящие.

Отсюда-то и вытекает способ определения сложения двух величин; так, если интервал AB по определению равен интервалу CD, то интервал AD по определению будет суммой интервалов AB и CD.

Это определение в весьма значительной мере произвольно. Однако оно произвольно не вполне. Оно подчинено известным соглашениям, например правилам коммутативности и ассоциативности сложения. Но как только выбранное определение удовлетворяет этим правилам, выбор делается безразличным, и более точное определение — бесполезным.

Различные замечания. Мы можем поставить перед собой несколько важных вопросов:

1. Исчерпывается ли творческое могущество разума созданием математической непрерывности?

Нет: труды Дюбуа-Реймона служат поразительным доказательством этого.

Известно, что математики различают бесконечно малые разных порядков, так что бесконечно малые второго порядка не только бесконечно малы в абсолютном смысле, но еще и являются таковыми по отношению к бесконечно малым первого порядка. Нетрудно представить себе бесконечно малые дробного и даже иррационального порядка, и, таким образом, мы снова находим ту последовательность математической непрерывности, которой посвящены предшествующие страницы. Более того: существуют такие бесконечно малые величины, которые бесконечно малы по отношению к бесконечно малым первого порядка и, напротив, бесконечно велики по отношению к бесконечно малым порядка $1+\varepsilon$, как бы ни было мало ε. Итак, вот еще новые члены, разместившиеся в нашем ряду; и если мне будет позволено вернуться к терминологии, которой я недавно держался и которая является достаточно удобной, хотя еще и не используется широко, я скажу, что этим создан вид непрерывности третьего порядка.

Легко было бы идти дальше, но это было бы бесполезной игрой ума; пришлось бы воображать себе одни символы без возможности их применения; на это никто не отважится. Даже непрерывность третьего порядка, к которой приводит рассмотрение различных порядков бесконечно малых, сама по себе является слишком мало полезной, чтобы приобрести право быть упоминаемой, и геометры рассматривают ее только просто как курьез. Разум пользуется своей творческой силой только тогда, когда опыт принуждает его к этому.

2. Раз мы обладаем понятием математической непрерывности, гарантированы ли мы от противоречий, аналогичных тем, которые положили начало этому понятию?

Нет; и я сейчас дам этому пример.

Надо быть очень сведущим, чтобы не считать очевидным, что каждая кривая имеет касательную:

и в самом деле, если представлять себе эту кривую и некоторую прямую как две узкие полосы, то всегда можно расположить их так, что они будут иметь общую часть, не пересекаясь. Теперь вообразим себе, что ширина этих двух полос бесконечно уменьшается; существование их общей части будет всегда возможным, и в пределе, так сказать, две линии будут иметь общую точку, не пересекаясь, т. е. они будут взаимно касаться друг друга.

Геометр, рассуждающий таким образом, сделал бы — сознательно или нет — то же самое, что мы сделали раньше, желая доказать, что две пересекающиеся линии имеют общую точку; и его интуиция могла бы показаться такой же законной.

Между тем она его обманула бы. Можно доказать, что существуют кривые, не имеющие касательных, если эта кривая определена как аналитическая непрерывность второго порядка.

Несомненно, какая-нибудь уловка, аналогичная раньше изученным нами, позволила бы устранить противоречие, но так как оно встречается только в весьма исключительных случаях, то им и не занимаются. Вместо того чтобы стараться примирить интуицию с анализом, удовольствовались тем, что пожертвовали одним из двух; и так как анализ должен остаться непогрешимым, то всю вину отнесли на счет интуиции.

Физическая непрерывность нескольких измерений. Выше я исследовал физическую непрерывность такою, какой она вытекает из непосредственных данных наших чувств или, если угодно, из прямых результатов опытов Фехнера; я показал, что эти результаты резюмируются противоречивыми формулами

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C.$$

Посмотрим теперь, как это понятие было обобщено и как оказалось возможным вывести из него понятие непрерывностей многих измерений.

Рассмотрим две любые группы ощущений. Мы или будем в состоянии различить их или нет, подобно тому как в опытах Фехнера вес в 10 граммов можно было отличить от веса в 12 граммов, но не от веса в 11 граммов. Ничего другого не нужно для построения непрерывности многих измерений.

Назовем *элементом* одну из этих групп ощущений. Это будет нечто аналогичное математической *точке*, однако не совсем то же самое. Мы не можем определить размеры нашего элемента, так как мы не умеем отличить его от соседних элементов, он как бы окутан туманом. Если бы можно было употребить астрономическое сравнение, наши «элементы» были бы подобны туманностям, между тем как математические точки уподоблялись бы звездам.

Если так, то система элементов образует *непрерывность*, раз есть возможность перейти от любого из них к какому угодно другому через ряд последовательных элементов — таких, что каждый из них не мог бы быть различен от предыдущего. Этот *линейный ряд* является по отношению к *линии* математика тем же, чем является изолированный *элемент* по отношению к точке.

Прежде чем идти дальше, я должен разъяснить, что такое *купюра*. Рассмотрим непрерывность C и возьмем у нее некоторые из ее элементов, которые на одно мгновение будем рассматривать не принадлежащими больше к этой непрерывности. Совокупность элементов, взятых таким образом, будет называться купюрой. Может статься, что вследствие этой операции C окажется *подразделенной* на несколько отдельных непрерывностей, так как совокупность остающихся элементов не будет более составлять единую непрерывность.

Тогда у C найдутся два элемента A и B, которые необходимо будет считать принадлежащими двум различным непрерывностям; мы узнаем это потому, что нельзя будет найти в C линейный ряд последовательных элементов (каждый из этих элементов не может отличаться от предыдущего; за первый возьмем A, а за последний B), *если хоть один из элементов этого ряда не будет неотличим от одного из элементов купюры.*

Может, напротив, случиться, что реализация купюры будет недостаточна для подразделения непрерывности C. В целях классификации физических непрерывностей мы должны исследовать, каковы должны быть купюры, которые необходимы для подразделения непрерывности.

Если физическую непрерывность C можно подразделить, реализуя купюру, состоящую из конечного числа различимых один от другого элементов (и не образующую ни одной непрерывности, ни нескольких непрерывностей), то мы скажем, что C есть непрерывность *одного измерения.*

Если, напротив, можно подразделить C только при помощи купюр, которые сами представляют собой непрерывности, то мы скажем, что C — непрерывность нескольких измерений. Если это достигается купюрами, которые являются непрерывностями одного измерения, то мы скажем, что C имеет два измерения; если достаточно купюр, имеющих два измерения, то мы скажем, что C имеет три измерения, и т. д.

Таким образом, понятие физической непрерывности многих измерений оказывается определенным благодаря тому весьма простому факту, что две группы ощущений могут быть различимыми или же неразличимыми.

Математическая непрерывность нескольких измерений. Понятие математической непрерывности n измерений вытекает отсюда совершенно естественно при помощи процесса, вполне подобного тому, который мы изучили в начале этой главы. Точка подобной непрерывности, как известно, представляется нам определенной при помощи системы n различных величин, называемых ее координатами.

Не всегда необходимо, чтобы величины эти были измеримыми. В геометрии имеется целая отрасль, в которой отвлекаются от измерения этих величин; в ней занимаются, например, только изучением вопроса, лежит ли точка B на кривой ABC между точками A и C, и не стараются узнать, равна ли дуга AB дуге BC, или она в два раза больше ее. Это — так называемый Analysis Situs [1]).

В этом вся сущность учения, привлекшего к себе внимание величайших геометров, учения, из которого вытекает ряд замечательных теорем. Эти теоремы отличаются от теорем обыкновенной геометрии тем, что они являются чисто качественными, и они остались бы справедливыми, если бы фигуры копировались не-

---

[1]) Analysis Situs — анализ положения, в современной терминологии — топология.— *Примеч. ред.*

искусным чертежником, который грубо нарушал бы их пропорции и заменял бы прямые линии более или менее искривленными.

Когда в только что определенную нами непрерывность пожелали ввести меру, эта непрерывность превратилась в пространство: родилась геометрия. Но я откладываю это исследование для второй части.