

Понятие об этих идеальных телах целиком извлечено нами из недр нашего духа, и опыт представляет только повод, побуждающий нас его использовать.

Предмет геометрии составляет изучение лишь частной «группы» перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме* (*dans notre esprit*), по крайней мере в виде возможности. Оно присуще нам не как форма нашего восприятия, а как форма нашей способности суждений. Надо только среди всех возможных групп выбрать ту, которая служила бы, так сказать, *эталон*ом, с которым мы соотносили бы реальные явления. Опыт направляет нас при этом выборе, но не делает его для нас обязательным; он показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильна, а то, какая наиболее *удобна*.

Читатель заметит, что я был бы в состоянии описывать фантастические миры, которые я представлял себе выше, *не переставая пользоваться языком обыкновенной геометрии*.

И в самом деле, мы не изменили бы его, даже если бы были перенесены в такой мир.

Существа, получившие там свое развитие, нашли бы без сомнения более удобным создать геометрию, отличную от нашей, которая лучше соответствовала бы их впечатлениям. Что же касается нас, то наверное даже при наличии *тех же* впечатлений мы нашли бы более удобным не изменять наших привычек.

Глава V

ОПЫТ И ГЕОМЕТРИЯ

1. В предыдущем я уже неоднократно старался показать, что принципы геометрии не являются фактами опыта и что, в частности, постулат Евклида не мог бы быть доказан опытом. Какими бы доказательными ни представлялись мне вышеприведенные соображения, я считаю нужным еще остановиться на этом вопросе, так как здесь мы встречаем ложную идею, глубоко укоренившуюся во многих умах.

2. Пусть мы изготовили материальный круг, измерили его радиус и окружность и желаем убедиться, равно ли отношение этих величин числу π . Что мы делаем в этом случае? Мы производим опыт не над

свойствами пространства, а над свойствами как того материала, из которого приготовлен этот *диск*, так и того, из которого сделан метр, служащий для измерений.

3. Геометрия и астрономия. Но вопрос ставят еще иначе. Если справедлива геометрия Лобачевского, то параллакс очень удаленной звезды будет конечным; если справедлива геометрия Римана, то он будет отрицательным. Эти результаты, по-видимому, допускают опытную проверку; можно было надеяться, что астрономические наблюдения могут решить выбор между тремя геометриями.

Но то, что в астрономии называется прямой линией, есть просто траектория светового луча. Если, следовательно, сверх ожидания, удалось бы открыть отрицательные параллаксы или доказать, что все параллаксы больше известного предела, то представлялся бы выбор между двумя заключениями: мы могли бы или отказаться от евклидовой геометрии, или изменить законы оптики и допустить, что свет распространяется не в точности по прямой линии. Бесплезно добавлять, что всякий счел бы второе решение более удобным.

Таким образом, евклидовой геометрии нечего опасаться новых опытов.

4. Можно ли утверждать, будто некоторые явления, возможные в евклидовом пространстве, невозможны в неевклидовом, так что опыт, констатируя эти явления, прямо противоречил бы гипотезе о неевклидовом пространстве? По моему мнению, подобный вопрос не может возникнуть. С моей точки зрения, он вполне равносителен следующему вопросу, нелепость которого всякому бросится в глаза: существуют ли длины, которые можно выразить в метрах и сантиметрах, но которых нельзя измерить туазами, футами и дюймами,— так что опыт, констатируя существование этих длин, прямо противоречил бы тому допущению, что существуют туазы, делящиеся на 6 футов.

Рассмотрим вопрос ближе. Допустим, что прямая линия в евклидовом пространстве обладает некоторыми двумя свойствами, которые я назову *A* и *B*; что в неевклидовом пространстве она по-прежнему обладает свойством *A*, но уже не обладает свойством *B*;

допустим, наконец, что в евклидовом — как и в неевклидовом — пространстве прямая линия есть единственная линия, обладающая свойством A .

Если бы это было так, то опыт мог бы решить выбор между гипотезами Евклида и Лобачевского. Представим себе, что мы констатировали бы, что известный конкретный предмет, доступный опыту, например пучок световых лучей, обладает свойством A ; отсюда мы заключили бы, что он прямолинейный, и исследовали бы затем, обладает он свойством B или нет.

Но *это не так*; не существует свойства, которое могло бы, как это свойство A , быть абсолютным критерием, позволяющим признать, что данная линия есть прямая, и отличить ее от всякой другой линии.

Скажут, например, что это свойство следующее: «прямая линия есть такая линия, что фигура, часть которой она составляет, может двигаться без изменения взаимных расстояний ее точек, причем все точки этой линии остаются неподвижными».

В самом деле, здесь мы имеем свойство, которое и в евклидовом и в неевклидовом пространстве принадлежит прямой и только прямой. Но как узнать на опыте, обладает ли этим свойством тот или другой конкретный предмет? Для этого понадобится измерить расстояния между некоторыми его точками, но как убедиться, что та конкретная величина, которую я измерил своим материальным прибором, в точности представляет собой абстрактное расстояние между этими точками?

Таким образом, мы лишь отодвинули трудность.

И действительно, свойство, которое я изложил, не есть свойство лишь одной прямой линии, оно есть свойство как прямой, так и расстояния. Чтобы оно могло служить абсолютным критерием, надо иметь возможность установить не только то, что оно не принадлежит никакой иной линии, кроме прямой, и принадлежит расстоянию, но еще то, что оно не принадлежит никакой другой линии, кроме прямой, и никакой другой величине, кроме расстояния. А именно это неверно.

Поскольку невозможно указать конкретный опыт, который мог бы быть истолкован в евклидовой системе и не мог бы быть истолкован в системе Лобачев-

ского, то я могу заключить: никогда никакой опыт не окажется в противоречии с постулатом Евклида, но зато и никакой опыт не будет никогда в противоречии с постулатом Лобачевского.

5. Итак, евклидова (или неевклидова) геометрия никогда не может оказаться в прямом противоречии с опытом. Но этого недостаточно. Возникает вопрос: не может ли случиться, что ее можно будет согласовать с опытом лишь путем нарушения принципа достаточного основания и принципа относительности пространства?

Объясняюсь подробнее. Рассмотрим какую-нибудь материальную систему; мы обратим внимание, с одной стороны, на «состояние» различных тел этой системы (например, на их температуру, электрический потенциал и т. д.), с другой стороны — на их положение в пространстве; и среди данных, которые позволяют определить это положение, мы различим еще взаимные расстояния этих тел, определяющие их относительные положения, и условия, которые определяют абсолютное положение системы и ее абсолютную ориентировку в пространстве.

Законы явлений, которые будут происходить в этой системе, могут зависеть от состояния этих тел и их взаимных расстояний; но вследствие относительности и пассивности пространства они не будут зависеть от абсолютного положения и абсолютной ориентировки системы.

Другими словами, состояние тел и их взаимные расстояния в какой-нибудь момент будут зависеть от состояния этих же тел и их взаимных расстояний в начальный момент; но они ни в каком случае не будут зависеть от абсолютного начального положения системы и ее абсолютной начальной ориентировки. Это свойство для краткости я буду называть *законом относительности*.

Я говорил до сих пор как геометр, следующий Евклиду. Всякий опыт, как я уже сказал, допускает истолкование на почве евклидовой гипотезы; но он допускает его и на почве гипотезы неевклидовой. Мы произвели ряд опытов; мы их истолковали на основании евклидовой гипотезы и нашли, что это истолкование согласно с «законом относительности».

Истолкуем их теперь по неевклидовой гипотезе. Это всегда возможно; отличие же лишь в том, что в этом новом истолковании неевклидовы расстояния между отдельными телами вообще не будут теми же, что евклидовы расстояния в первом истолковании.

Но будут ли истолкованные таким новым способом опыты по-прежнему оставаться в согласии с нашим «законом относительности»? И если это согласие не сохранится, то не будем ли мы все-таки вправе сказать, что опыт доказал неправильность неевклидовой геометрии?

Легко видеть, что это опасение напрасно; в самом деле, для того чтобы можно было приложить закон относительности во всей строгости, надо было бы приложить его ко всей Вселенной. Если же иметь в виду только часть этой Вселенной и если абсолютное положение этой части изменилось, то и расстояния ее относительно других тел Вселенной также изменились, следовательно, их влияние на рассматриваемую часть Вселенной могло увеличиться или уменьшиться; а это может изменить законы происходящих здесь явлений.

Но если система, о которой у нас идет речь, есть вся Вселенная, то опыт бессилен дать нам указания о ее абсолютном положении и ориентировке в пространстве. Все, что могут обнаружить наши инструменты, сколь бы совершенны они ни были,— это состояние различных частей Вселенной и их взаимные расстояния.

Таким образом, наш закон относительности может быть формулирован так:

Отсчеты, которые мы можем производить в какой-нибудь момент на наших инструментах, будут зависеть только от отсчетов, которые мы могли бы произвести на тех же инструментах в начальный момент.

Но подобная формулировка не зависит ни от какого истолкования опытов. Если закон верен в евклидовом истолковании, он будет верен также и в неевклидовом истолковании.

Я позволю себе по этому поводу сделать маленькое отступление. Выше я говорил о данных, определяющих положение различных тел системы; мне следовало бы сказать также о данных, определяющих их скорости; тогда мне пришлось бы различать, с одной

стороны, скорость, с которой изменяются взаимные расстояния различных тел, а с другой — скорости переноса и вращения системы, т. е. скорости, с которыми изменяются ее абсолютное положение и ориентировка.

Для полного удовлетворения ума надо было бы закон относительности формулировать так:

Состояние тел и их взаимные расстояния в какой-нибудь момент, так же, как и скорости, с которыми изменяются эти расстояния в тот же момент, зависят только от состояния этих тел, их взаимных расстояний в начальный момент, а также от скоростей, с которыми последние изменялись в этот начальный момент; но они не будут зависеть ни от начального абсолютного положения системы, ни от ее абсолютной ориентировки, ни от скоростей, с которыми изменялись это абсолютное положение и ориентировка в начальный момент.

К сожалению, закон, сформулированный таким образом, не находится в согласии с опытами, по крайней мере с обычным их истолкованием.

Представим себе человека, перенесенного на некоторую планету, где небо постоянно закрыто густым покровом облаков, так что никогда не видно других светил; пусть жизнь этой планеты течет так, как если бы она была изолирована в пространстве. Все же этот человек мог бы заметить ее вращение, измеряя, например, ее сжатие (это производится обыкновенно при помощи астрономических наблюдений, но могло бы быть произведено и средствами чисто геодезическими) или повторяя опыт Фуко с маятником. Следовательно, абсолютное вращение этой планеты могло бы быть обнаружено.

Факт этот смущает философа, но физик вынужден его принять.

Известно, что из этого факта Ньютон заключил о существовании абсолютного пространства; я никак не могу согласиться с таким заключением; причины этого я покажу в третьей части, так как я не хотел бы касаться такого трудного вопроса мимоходом.

Таким образом, мне поневоле пришлось в формулировку закона относительности ввести скорости всякого рода среди данных, определяющих состояние тел.

Во всяком случае, трудность эта остается одной и той же как для геометрии евклидовой, так и для геометрии Лобачевского; поэтому я особенно не был обеспокоен ею и упомянул о ней только к случаю. Что важно, так это вывод: опыт не может решить выбор между Евклидом и Лобачевским.

Итак, как ни взглянуть на дело, невозможно найти разумное основание для геометрического эмпиризма.

6. Опыты обнаруживают только взаимные отношения тел; никакой опыт не даст и не может дать указаний об отношениях тел к пространству или о взаимных отношениях различных частей пространства.

«Да,— скажете вы на это,— единичный опыт недостаточен, так как он дает только одно уравнение со многими неизвестными; но когда я произведу достаточное количество опытов, я буду иметь достаточно уравнений, чтобы вычислить все мои неизвестные».

Но недостаточно знать высоту грот-мачты,— выражаю я,— чтобы вычислить возраст капитана. Определив все размеры корпуса корабля, вы будете иметь много уравнений, но все-таки вы не узнаете этого возраста. Все ваши измерения, относящиеся к частям корабельного корпуса, не могут обнаружить вам ничего, кроме того, что касается этих частей. Точно так и ваши опыты, как бы многочисленны они ни были: указывая только на взаимные отношения тел, они не скажут нам ничего о взаимных отношениях различных частей пространства.

7. Вы скажете, что если опыты относятся к телам, то они относятся по крайней мере к геометрическим свойствам тел.

Но, прежде всего,— что вы понимаете под геометрическими свойствами тел? Допустим, что здесь речь идет об отношениях тел к пространству; но эти свойства недоступны опытам, которые касаются только взаимного отношения между телами. Одного этого замечания было бы достаточно, чтобы показать, что речь идет о другом.

Постараемся прежде всего понять смысл выражения: геометрические свойства тел. Когда я говорю, что тело слагается из нескольких частей, я думаю, что этим я не высказываю суждения о геометрическом

свойстве; это осталось бы справедливым, даже если бы я условился пользоваться неподходящим названием точек для наименьших рассматриваемых мною частей.

Когда я говорю, что такая-то часть такого-то тела находится в соприкосновении с такой-то частью другого какого-нибудь тела, я высказываю предложение, касающееся взаимных отношений этих двух тел, но не их отношений к пространству.

Я думаю, вы согласитесь со мной, что здесь мы имеем дело не с геометрическими свойствами; по крайней мере, вы, наверно, согласитесь, что эти свойства независимы от каких бы то ни было понятий метрической геометрии.

После этого представим себе, что имеется твердое тело, состоящее из восьми тонких железных стержней $OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG$ и OH , соединенных вместе своими концами O .

Пусть, с другой стороны, мы имеем второе твердое тело, например кусок дерева, на котором отметим чернилами три маленьких пятнышка; я назову их α, β, γ .

Пусть мы убедились затем, что можно привести в соприкосновение $\alpha\beta\gamma$ с AGO (т. е. одновременно α с A , β с G и γ с O), потом — что последовательно можно привести в соприкосновение $\alpha\beta\gamma$ с BGO, CGO, DGO, EGO, FGO , затем с $AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO$, потом $\alpha\gamma$ последовательно с AB, BC, CD, DE, EF, FA .

Вот опытные факты, в которых можно удостовериться, не имея наперед никакого знания о форме или метрических свойствах пространства. Они никоим образом не относятся к «геометрическим свойствам тел». И эти факты будут невозможны, если тела, над которыми экспериментируют, движутся, следуя группе такой же структуры, как группа Лобачевского (я хочу сказать — по законам движения твердых тел в геометрии Лобачевского). Значит, достаточно этих фактов, чтобы убедиться, что тела эти движутся, следуя евклидовой группе, или, по крайней мере, что они движутся не в соответствии с группой Лобачевского.

Что эти факты совместимы с евклидовой группой, легко убедиться: стоит только представить себе $\alpha\beta\gamma$ неизменяемым твердым телом нашей обычной геомет-

рии, имеющим форму прямоугольного треугольника, а точки A, B, C, D, E, F, G, H — вершинами многогранника, образованного двумя правильными шестигранными пирамидами нашей обыкновенной геометрии, имеющими общим основанием $ABCDEF$, а вершинами — одна G , другая H .

Предположим теперь, что вместо предыдущих фактов мы наблюдали, что можно опять-таки наложить $\alpha\beta\gamma$ последовательно на $AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO$, а потом можно $\alpha\beta$ (отнюдь не $\alpha\gamma$) наложить последовательно на AB, BC, CD, DE, EF и FA .

Вот опытные факты, которые можно было бы наблюдать, если бы неевклидова геометрия была правильна и если бы $\alpha\beta\gamma$ и $OABCDEFGH$ были неизменяемыми твердыми телами: первое — в форме прямоугольного треугольника, а второе — в форме двойной правильной шестигранной пирамиды соответствующих размеров.

Итак, эти новые факты невозможны, раз тела движутся, следуя евклидовой группе; но они стали бы возможны, если бы допустить, что тела движутся подобно группе Лобачевского. Их было бы, следовательно, достаточно (если бы они наблюдались), чтобы убедиться, что рассматриваемые тела не движутся, следуя евклидовой группе.

Таким образом, не вводя никакой гипотезы о форме и природе пространства, об отношениях тел к пространству, не приписывая телам никакого геометрического свойства, я нашел факты, позволяющие мне показать, что доступные опытам тела в одном случае движутся, следуя структуре группы Евклида, в другом — следуя структуре группы Лобачевского.

Однако нельзя сказать, что первый ряд фактов может составить опыт, доказывающий, что пространство является евклидовым, а второй — опыт, доказывающий, что пространство неевклидово.

В самом деле, можно было бы представить себе тела, движущиеся таким образом, что они осуществляют второй ряд фактов. Доказательством служит то, что любой механик мог бы их построить, если бы он захотел взять на себя этот труд и если бы придавал этому значение. Однако из этого вы не заключили бы, что пространство неевклидово, тем более, что

обыкновенные твердые тела продолжали бы существовать и тогда, когда механик построил бы странные тела, упомянутые мною: так что пришлось бы даже заключить, что пространство является одновременно евклидовым и неевклидовым.

Предположим, например, что мы имеем большую сферу радиуса R и что температура убывает от центра к поверхности этой сферы по закону, о котором я говорил, описывая неевклидов мир.

Мы могли бы иметь тела, расширением которых можно было бы пренебречь и которые вели бы себя как обыкновенные неизменяемые твердые тела; с другой стороны, мы могли бы иметь тела очень растяжимые, которые вели бы себя как неевклидовы твердые тела. Мы могли бы иметь две двойные пирамиды $OAB CDEFGH$ и $O'A'B'C'D'E'F'G'H'$ и два треугольника $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$. Первая двойная пирамида была бы прямолинейной, вторая — криволинейной; треугольник $\alpha\beta\gamma$ был бы сделан из нерастяжимого, а треугольник $\alpha'\beta'\gamma'$ — из очень растяжимого вещества.

Тогда можно было бы обнаружить первый ряд фактов с двойной пирамидой OAH и треугольником $\alpha\beta\gamma$ и второй — с двойной пирамидой $O'A'H'$ и треугольником $\alpha'\beta'\gamma'$. И тогда опыт, по-видимому, убеждал бы сначала, что евклидова геометрия истинна, а затем — что она ложна.

Таким образом, опыты относятся не к пространству, а к телам.

8. Добавление. Для полноты мне следовало бы еще сказать о вопросе очень тонком, который потребовал бы подробного развития; я ограничусь здесь только резюмированием того, что я изложил в «Revue de Métaphysique et de Morale» и в «The Monist». Что мы хотим сказать, когда говорим, что пространство имеет три измерения?

Мы видели важность тех «внутренних изменений», которые нам открываются нашими мускульными ощущениями. Они могут служить для характеристики различных *положений* нашего тела. Возьмем за начальное одно из этих положений A . Когда мы переходим от этого начального положения к какому-нибудь другому положению B , мы испытываем ряд мускульных ощущений S , и этим рядом S определяется B . Однако заметим, что часто мы рассматриваем

два ряда S и S' как определяющие одно и то же положение B (потому что начальное и конечное положение A и B остаются теми же, но промежуточные положения и соответствующие ощущения могут различаться). Как же мы узнаем об эквивалентности этих двух рядов? Это возможно потому, что они могут служить для компенсации одного и того же внешнего изменения, или, более общо, потому, что когда речь идет о компенсации внешнего изменения, один из рядов может быть заменен другим.

Среди этих рядов мы выделили те, которые одни могут компенсировать внешнее изменение и которые мы назвали «перемещениями». Так как мы не можем различать два слишком близких перемещения, то совокупность этих перемещений представляет характерные черты физической непрерывности; опыт учит нас, что эта физическая непрерывность имеет шесть измерений; но мы не знаем еще, сколько измерений имеет пространство само по себе; нам надо решить сначала другой вопрос.

Что такое точка пространства? Все думают, что знают это, но это только иллюзия. Когда мы стараемся представить себе точку пространства, то она выступает в виде черного пятна на белой бумаге или как белое пятно от мела на черной доске; это всегда объект. Поэтому вопрос должен быть поставлен следующим образом: что значит, когда я говорю, что предмет B находится в той же точке, которую только что занимал предмет A ? И еще: какой критерий позволит мне узнать это?

Я хочу этим сказать, что *хотя сам я не шевелился* (о чем свидетельствует мое мускульное чувство), но мой указательный палец, который только что касался предмета A , теперь касается предмета B . Я мог бы воспользоваться другими критериями, например средним пальцем или чувством зрения. Но первый критерий достаточен, я знаю, что если он отвечает утвердительно, то все другие критерии дадут тот же ответ. Я знаю это *из опыта* — я не могу знать этого à priori.

Поэтому-то я говорю также, что осязание не может действовать на расстоянии; это — только другой способ выражения того же экспериментального факта. И если я говорю, наоборот, что зрение действует на расстоянии, то это значит, что критерий, доставляе-

мый зрением, может отвечать утвердительно, тогда как другие отвечают отрицательно.

В самом деле, пусть некоторый предмет даже после удаления дает свое отображение в той же точке сетчатки. Тогда зрение дает положительный ответ: предмет пребывает в той же точке, но осязание отвечает отрицательно, ибо палец, только что касавшийся предмета, теперь уже больше его не касается. Если бы опыт показал нам, что касание одним пальцем дает отрицательный ответ, тогда как касание другим — положительный, то мы сказали бы то же самое: что осязание действует на расстоянии.

Итак, для каждого положения моего тела мой указательный палец определяет некоторую точку; это и только это определяет точку пространства.

Каждому положению соответствует, таким образом, одна точка; но часто бывает, что та же точка соответствует нескольким различным положениям (например, в том случае, когда мы говорим, что наш палец не двигался, между тем как остальная часть тела переместилась). Мы выделяем, следовательно, среди изменений положения такие, при которых палец не двигается. Как мы приходим к этому? Только благодаря тому, что мы часто замечаем, как при этих изменениях предмет, находящийся в контакте с пальцем, не разрывает этого контакта.

Отнесем к одному и тому же классу все те положения, которые вытекают одни из других путем одного из выделенных нами таким образом изменений. Всем положениям одного и того же класса будет соответствовать одна и та же точка пространства. Поэтому каждому классу будет соответствовать точка, и каждой точке — класс. Но можно сказать: то, к чему относится опыт, не есть точка; это есть указанный класс изменений или лучше — соответственный класс мускульных ощущений.

И когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, мы хотим просто сказать, что совокупность этих классов выступает перед нами с характерными чертами физической непрерывности трех измерений.

Мог бы показаться заманчивым тот вывод, что именно опыт показал нам, сколько измерений имеет пространство. Но в действительности наши опыты

имели здесь дело еще не с пространством, а с нашим телом и с его отношениями к соседним предметам. Кроме того, они слишком грубы.

В нашем уме предсуществовала скрытая идея известного числа групп: это — те группы, теорию которых создал Ли. Какую из них мы выберем в качестве как бы эталона, с которым будем сравнивать реальные явления? И, выбрав эту группу, какую из ее подгрупп мы возьмем для характеристики точки пространства? Раньше нами руководил опыт, показывая, какой выбор лучше соответствует свойствам нашего тела. Но тут его роль ограничивается.

Опыт предков. Часто говорят, что если индивидуальный опыт не мог породить геометрию, то это не относится к опыту всего человеческого вида. Но что под этим понимается? Не хотят ли этим сказать, что если мы не в состоянии доказать постулат Евклида, то наши предки могли это сделать? Ни в коем случае. Этим хотят сказать, что в силу естественного отбора наш ум приспособился к условиям внешнего мира, что он усвоил себе геометрию, наиболее выгодную для вида, или, другими словами, наиболее удобную. Но это соответствует нашим выводам о том, что геометрия не истинна, а только выгодна.