Глава II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕПОДАВАНИЕ

1. Я должен говорить здесь об общих определениях в математических науках; по крайней мере к этому меня обязывает название настоящей главы. Но мне невозможно будет оставаться в рамках предмета в такой мере, в какой это требовалось бы правилом единства действия; я не смогу трактовать вопроса, не затрагивая отчасти других ближайших вопросов, и потому прошу простить мне уклонения вправо и влево, которые встретятся в дальнейшем.

Что разумеют под хорошим определением? Для философа или для ученого это есть определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам и только к ним; такое определение удовлетворяет правилам логики. Но при преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое понято учениками.

Чем объяснить, что многие умы отказываются понимать математику? Не парадоксально ли это? В самом деле, вот наука, которая апеллирует только к основным принципам логики, например к принципу противоречия, апеллирует к тому, что составляет, так сказать, скелет нашего разумения, к тому, от чего нельзя отказаться, не отказываясь вместе с тем от самого мышления, и все же встречаются люди, которые находят эту науку темной! И этих людей большинство! Пусть бы они оказались неспособными изобретать — это еще допустимо. Но они не понимают доказательств, которые им предлагают, они остаются слепыми, когда им подносят свет, который для нас горит чистым и ярким пламенем, — вот что чрезвычайно странно.

А между тем достаточно и небольшого опыта, доставляемого экзаменами, чтобы убедиться в том, что эти слепые отнюдь не являются исключениями. Здесь имеется проблема, которая не легко решается, но которая должна занимать всех, желающих посвятить себя делу преподавания.

Что значит понимать? Имеет ли это слово для всех одно и то же значение? Понять доказательство теоремы — значит ли это рассмотреть последовательно каждый из силлогизмов, из коих составляется доказательство, и констатировать, что он правилен и согласуется с ходом задачи? Точно так же понять определение — значит ли это только признать, что смысл всех употребленных в нем терминов уже известен, и констатировать, что определение не заключает в себе никакого противоречия?

«Да», — скажут одни, которые, констатировав отсутствие противоречия в определении, говорят· «мы его поняли». «Нет», — скажет большинство. Почти все люди оказываются более требовательными; они хотят не только знать, правильны ли все силлогизмы доказательства, но еще и знать, почему силлогизмы связываются в данном, а не в другом порядке. Пока им кажется, что эта связь рождена капризом, а не разумом в постоянном сознании преследуемой цели, они думают, что не поняли доказательства.

Без сомнения, они сами не отдают себе отчета в том, чего они собственно требуют, и не могут формулировать своего желания; но если они не находят удовлетворения, то они смутно чувствуют, что чего-то им недостает. Что же тогда происходит? Вначале они еще схватывают те очевидные вещи, которые представляются их взору; но, так как последние связаны чрезвычайно тонкой нитью с предшествующими и последующими, то они не оставляют никакого следа в их мозгу; они тотчас забываются. Освещенные на одно мгновение, они сейчас же исчезают в сумраке вечной ночи. А когда эти люди следят за дальнейшим развитием доказательства, для них исчезает и прежняя эфемерная ясность, так как теоремы опираются одна на другую, а теоремы, которые им нужны, уже забыты. Таким образом, эти люди становятся неспособными понимать математику.

Не всегда здесь виной преподаватель; зачастую ум людей, нуждающийся в руководящей нити, слишком ленив для поисков ее. Но, чтобы помочь непонимающим, мы должны сначала хорошо узнать то, что их останавливает.

Другие же спросят, для чего все это служит; они не поймут силлогизмов, если они не нашли вокруг себя на практике или в природе основания для того или иного математического понятия. Под всяким словом они хотят разглядеть чувственный образ; необходимо, чтобы определение вызывало этот образ, чтобы на каждой стадии доказательства они видели его превращения и эволюцию. Лишь при таком условии они поймут и удержат в памяти доказательство. Такие люди часто заблуждаются относительно самих себя; они не слушают рассуждений, а рассматривают фигуры, они воображают, что поняли, тогда как они только видели.

2. Сколько различных тенденций! Нужно ли с ними бороться? Или нужно ими воспользоваться? А если мы хотим с ними бороться, то какой из них должны мы благоприятствовать? Нужно ли доказывать тем, которые довольствуются чистой логикой, что они видят только одну сторону вещей? Или, напротив, нужно доказывать тем, которые не удовлетворяются так легко, что то, чего они требуют, не является необходимостью?

Другими словами, должны ли мы принуждать молодых людей к тому, чтобы они изменяли природу своего ума? Такая попытка была бы бесплодна. Мы не обладаем философским камнем, который дал бы нам возможность превращать один в другой вверенные нам металлы; все, что мы можем сделать, — это работать, приспосабливаясь к их свойствам.

Многие дети неспособны стать математиками, тем не менее им необходимо преподавать математику. Да и сами математики не все отлиты по одной и той же модели. Достаточно прочитать их труды, чтобы заметить существование умов двух типов: логиков, как Вейерштрасс, и интуитивистов, как Риман. Такая же разница наблюдается и среди студентов. Одни любят разрабатывать задачи, как они выражаются, «путем анализа», другие — «путем геометрии».

Было бы бесполезно пытаться изменить что-либо в этом отношении, да и, помимо того, было ли бы это желательно?

Хорошо, что существуют логики и интуитивисты; кто рискнет утверждать, что он предпочел бы, чтобы Вейерштрасс никогда не писал или чтобы Римана не было? Таким образом, мы должны примириться с разнообразием умов или, еще лучше, мы должны ему радоваться.

3. Так как слово «понимать» имеет несколько значений, то определения, наиболее понятные для одних

людей, не будут совпадать с определениями, которые подходят для других. Мы имеем такие определения, которые стараются вызвать в нас образ, и такие, которые лишь комбинируют пустые формы, доступные интеллекту, но только ему одному, определения, которые по своей абстрактности лишены всякого материального содержания.

Я не знаю, нужно ли приводить примеры. Однако мы приведем некоторые, и прежде всего мы остановимся на определении дробей, которое даст нам крайний пример. В начальных школах, чтобы определить дробь, разрезают яблоко или пирог; конечно, разрезание происходит в уме, а не в действительности, ибо я не думаю, чтобы бюджет начальной школы позволял такую расточительность. В высшей нормальной школе или на факультетах, напротив, скажут: дробь — это совокупность двух целых чисел, разделенных горизонтальной чертой; определят при помощи соглашений те операции, которым можно подвергать эти символы; докажут, что правила для этих операций те же, какие употребляются в исчислении целых чисел и, наконец, обнаружат, что, умножая, согласно этим правилам, дробь на знаменатель, мы находим числитель. Такое определение будет здесь уместным, потому что его преподносят молодым людям, которые уже давно освоились с понятием о дробях — они уже делили яблоки и другие предметы; ум которых уже изощрен математической эрудицией; которые хотят, наконец, получить чисто логическое определение. Но как был бы ошеломлен начинающий, к которому подошли бы с подобным определением.

Таковы же определения, которые вы найдете в удивительной и несколько раз премированной книге Гильберта «Основания геометрии». Посмотрим, как он начинает: вообразим три системы вещей, которые мы назовем точками, прямыми и плоскостями. Что это за «вещи» — мы не знаем, да и незачем нам это знать. Было бы даже греховно стараться это узнать. Все, на что мы можем претендовать, сводится к тому, чтобы мы усвоили относящиеся к ним аксиомы, например следующую: две различные точки всегда определяют прямую, и комментарий к ней: вместо «определяют» мы можем сказать, что прямая проходит через две точки, или соединяет эти две точки, или что две точки расположены на прямой. Значит, фраза «точки расположены на прямой» является просто синонимом фразы «точки определяют прямую». Вот книга, которую я очень высоко ценю, но которую я не рекомендую лицеисту. Впрочем, я мог бы это сделать без опаски, так как в чтении ее он ушел бы не очень далеко.

Я взял крайние примеры; никакой преподаватель, конечно, не предложил бы таких определений. Но разве не остается такая же опасность и тогда, когда мы стоим ближе к действительности?

Вот в четвертом классе. Преподаватель диктует: «окружность — это геометрическое место точек на плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии от одной внутренней точки, именуемой центром». Хороший ученик вписывает эту фразу в свою тетрадь; плохой ученик рисует в ней «человечков», но ни тот, ни другой ничего не поняли. Тогда преподаватель берет мел и рисует круг на доске. «Ага, — думают ученики, — почему он не сказал сразу: окружность — это кружок, и мы бы сразу поняли». Без сомнения, преподаватель прав. Определение учеников не имело бы никакой ценности, потому что не могло бы служить ни для какого доказательства, и в особенности не привило бы им спасительной привычки анализировать свои понятия. Но им надобно было бы доказать, что они не понимают того, что им кажется понятным, надобно было бы заставить их отдать себе отчет в грубости их первоначального представления, сделать так, чтобы они сами пожелали очистить и улучшить это представление.

4. Я еще вернусь ко всем этим примерам. Я хотел лишь показать вам две противоположные идеи: между ними имеется самый резкий контраст, причина которого нам раскрывается историей науки. Если мы читаем книгу, написанную пятьдесят лет назад, то рассуждения, которые мы в ней находим, кажутся нам большей частью лишенными логической строгости.

В ту эпоху допускали, что непрерывная функция не может изменить знак, не проходя через нуль; теперь это доказывают. Допускали, что обыкновенные правила счисления приложимы к несоизмеримым числам, теперь это доказывают. Допускали еще и другие вещи, которые порою оказывались ложными.

Доверялись интуиции. Но интуиция не может дать ни строгости суждений, ни уверенности в их правильности, в этом убеждались все более и более. Интуиция, например, учит нас, что всякая кривая имеет касательную, т. е. что каждая непрерывная функция имеет производную, и, однако, это положение ложно. А так как знание стремилось к уверенности, то приходилось все более и более ограничивать роль интуиции. Каким образом свершилась эта необходимая эволюция? Вскоре было замечено, что рассуждения лишь тогда приобретут строго доказательную силу, когда эта строгость будет предварительно внесена в определения.

Объекты, которыми занимаются математики, долгое время не имели хороших определений; эти предметы казались известными потому, что их себе представляли при помощи чувств или воображения; но в действительности их образы отличались грубостью; не было точных идей, на которые могли бы опереться доказательства. Вот в эту сторону логики вынуждены были направить свои усилия. Примером могут служить несоизмеримые числа.

Неопределенная идея непрерывности, которой мы обязаны интуиции, разрешилась в сложную систему неравенств, имеющих дело с целыми числами. Благодаря этому исчезли, наконец, все те трудности, которые пугали наших отцов, когда они размышляли об основаниях исчисления бесконечно малых величин.

Теперь анализ имеет дело только с целыми числами или же с конечными или бесконечными системами целых чисел, связанных совокупностью равенств и неравенств.

Математические науки, как говорят, арифметизировались.

5. Но можно ли думать, что эти науки достигли абсолютной строгости, ничем со своей стороны не жертвуя? Ничуть; то, что они выиграли в строгости, они потеряли в объективности. Они приобретали совершенную чистоту, удаляясь от реальности. Теперь можно свободно обозреть всю область математического знания, которая раньше была усеяна преградами, но эти преграды не исчезли. Они были лишь

перенесены на границу; и если мы хотим перейти эту границу, чтобы вступить в область практики, то мы должны снова преодолеть эти препятствия.

Прежде мы обладали лишь неясными понятиями, составленными из несвязанных элементов, из которых одни были априорны, другие вытекали из более или менее уясненного опыта; мы думали, что главные их свойства узнаны интуитивным путем. Теперь эмпирические элементы отвергаются и сохраняются лишь элементы априорные, для определения берется одно из свойств, все другие выводятся из него путем строгого рассуждения. Это хорошо, но остается еще доказать, что свойство, ставшее определением, принадлежит действительно тем реальным объектам, с которыми нас познакомил опыт и из которых мы вывели наше ясное интуитивное понятие. Чтобы это доказать, необходимо обратиться к опыту или прибегнуть к усилию интуиции; если же мы этого не докажем, то наши теоремы будут совершенно строгими, но и совершенно бесполезными.

Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т. д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остается лишь маленький уголок. Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретаются специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждения наших отцов, никакого иного вывода, кроме этого, из них нельзя извлечь.

Если бы логика была единственным руководителем педагога, то нужно было бы начинать с наиболее общих, т. е. наиболее причудливых функций. Именно начинающего следовало бы в таком случае отдать во власть этого музея уродств. «Если вы этого не делаете, — могли бы сказать логики, — то вы достигнете надлежащей строгости лишь после целого ряда этапов».

6. Быть может, это и так; но мы не можем не дорожить реальностью. Я разумею здесь не только реальность чувственного мира, который, впрочем, имеет свою ценность уже потому, что девять десятых ваших учеников ищут у вас орудий именно для борьбы с этой реальностью. Но есть реальность более утонченная, которая составляет жизнь математических субстанций и которая все-таки не логика.

Наше тело составлено из клеток, клетки — из атомов. Составляют ли эти клетки и эти атомы все, что есть реального в человеческом теле? Не представляет ли собою способ, каким эти клетки собраны и который обусловливает единство индивида, также реальности и реальности гораздо более интересной. Мог бы натуралист, изучавший слона только под микроскопом, думать, что он достаточно познакомился с этим животным?

То же самое в области математики. Когда логик разложил всякое доказательство на множество элементарных операций, вполне правильных, он еще не уловил реальности в ее целом; то неизвестное мне, что составляет единство доказательства, совершенно от него ускользнуло.

Сто́ит ли в здании, возведенном нашими учителями, удивляться работе каменщика, если мы не понимаем плана архитектора? Но общий взгляд не дается нам чистой логикой; чтобы получить его, мы должны обратиться к интуиции.

Возьмем для примера идею непрерывной функции. Сначала это не что иное, как чувственный образ, след, начертанный мелом на черной доске. Мало-помалу эта идея очищается. Ею пользуются для построения сложной системы неравенств, воспроизводящей все линии примитивного образа. Когда построение закончено; кружала [1]) снимаются, как это делается после сооружения свода, то грубое представление, которое стало отныне бесполезным, исче-

---

[1]) Кружало — деревянное сооружение, устанавливаемое под сводом перед его кладкой. Служит для придания своду надлежащей кривизны и предохраняет его от падения до отвердения цемента. — *Примеч. ред.*

зает, остается лишь само здание, безупречное в глазах логика. И, однако, если бы преподаватель не влил содержания в первоначальные образы, если бы он не установил на время кружал, разве мог бы ученик догадаться, по какому капризу все эти неравенства определенным образом нанизывались одно на другое? Определение было бы правильным с логической стороны, но оно не раскрыло бы ученику настоящей реальности.

7. Мы должны вернуться назад. Без сомнения, учителю неприятно вести преподавание в рамках, которые его не вполне удовлетворяют. Но удовлетворение учителя — не единственная цель обучения; нужно прежде всего считаться с умом ученика и с тем, что из него желают сделать.

Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного резюмирует вкратце историю его предков в разные геологические периоды. Воспитатель должен заставить ребенка пройти через те ступени, которые были пройдены его предками, пройти быстрее, но без пропуска промежуточных этапов. В этом смысле история науки должна быть нашим первым руководителем.

Наши предки думали, что знают, что такое дробь, непрерывность, площадь кривой поверхности; лишь мы заметили, что они этого не знали. Точно так же наши ученики думают, что они это знают, когда уже принимаются серьезно за изучение математики. Если я, без предварительной подготовки, скажу им: «нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен вам доказать то, что вы считали очевидным», — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как произвольно собранная груда бесполезных умствований; и они либо почувствуют к ней отвращение, либо будут забавляться ею, как игрою, и в умственном отношении уподобятся греческим софистам.

Напротив, позже, когда ученик освоится с математическим суждением и ум его созреет в этой продолжительной работе, сомнения станут возникать сами собой, и тогда ваше доказательство будет своевременным. Оно разбудит новые сомнения, и вопросы предстанут перед юношей в той последовательности, в какой они представлялись нашим отцам; и это будет продолжаться до тех пор, пока он не разовьется в такой мере, что его будут удовлетворять только совершенно строгие определения. Недостаточно еще во всем сомневаться, нужно знать, почему возникает сомнение.

8. Главная цель обучения математике — это развить известные способности ума, а между этими способностями интуиция отнюдь не является наименее ценной. Благодаря ей мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром; и если чистая математика может обойтись без нее, то она всегда необходима, чтобы заполнить пропасть, которая отделяет символы от реального мира; к нему будет постоянно обращаться практик, а ведь на одного чистого геометра приходится сто практиков.

Инженер должен получить полное математическое образование, но для чего оно ему? Для того чтобы видеть различные стороны вещей, видеть их быстро. У него нет времени гоняться за мелочами. В сложных физических предметах, которые представляются его взору, он должен быстро найти точку, к которой могут быть приложены данные ему в руки математические орудия. Как бы он это сделал, если бы между предметами и орудиями оставалась та пропасть, которую вырыли логики?

9. Наряду с будущими инженерами имеются ученики, не столь многочисленные, которые должны стать учителями. Последние должны дойти до конца; для них прежде всего обязательно глубокое и строгое изучение основных принципов. Но отсюда не следует, что в них не надо культивировать интуиции. Ибо они могут составить себе ложное представление о науке, если всегда будут смотреть на нее с одной только стороны, и они не сумеют развить в своих питомцах того качества, которым сами не обладают.

Для чистого геометра эта способность необходима. Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции. Хорошо уметь критиковать, еще лучше — уметь творить. Вы способны распознать, правильна ли данная комбинация, и это недурно, раз вы не обладаете искусством сделать выбор между всеми возможными комбинациями. Логика нам говорит, что на таком-то пути мы можем быть уверены, что не встретим препятствий; она не говорит, какой путь ведет к цели. Для этого необходимо видеть цель издалека, и интуиция есть та способность, которая этому нас учит. Без нее геометр походил бы на писателя, который был бы прикован к грамматике, но не имел бы идей. Но как может развиться такая способность, раз ее преследуют и изгоняют, лишь только она обнаруживается, раз приучают относиться к ней с недоверием еще раньше, чем убедились в пользе, которую она может принести.

Позвольте мне здесь мимоходом остановиться на важности письменных работ. Эти работы занимают, быть может, слишком мало места на экзаменах, например, в Политехнической школе. Мне говорят, что такие работы закрыли бы доступ хорошим ученикам, которые понимают пройденные курсы, хорошо их знают, но не способны сделать из них ни малейшего применения. Я сказал выше, что слово «понимать» имеет несколько значений: эти ученики «понимают» определения в первом из указанных мною значений этого слова; но мы видели, что такого понимания недостаточно ни для инженера, ни для геометра. А так как здесь необходимо сделать выбор, то я предпочитаю выбрать тех, которые понимают вполне.

10. Но искусство правильно рассуждать разве не есть драгоценное качество, которое преподаватель математики должен прежде всего культивировать? Я этого не забываю. Об этом нужно позаботиться с самого начала. Я был бы в отчаянии, если бы увидел, что геометрия выродилась в какую-то тахеометрию[1]) нижайшего уровня, и нисколько не подписываюсь под крайними доктринами некоторых немецких обер-учителей. Но при изучении математики и именно тех отделов ее, где указанные выше неудобства не встречаются, бывает немало случаев, которые дают место для упражнения учеников в правильном рассуждении. У нас имеются длинные сцепления

---

[1]) Тахеометрия — раздел геодезии, посвященный изучению методов измерения на земной поверхности с помощью специального прибора — тахеометра. — *Примеч. ред.*

теорем, в которых абсолютная логика сразу и как будто естественно заняла господствующее положение и которые, как образцы, вышедшие из рук первых геометров, достойны всякого удивления и подражания.

Именно в изложении основных принципов нужно избегать излишних тонкостей Здесь они и не привились бы и к тому же были бы бесполезны Нельзя все доказать и нельзя все определить Приходится всегда делать заимствование у интуиции. Неважно, сделаем ли мы это заимствование немного раньше или немного позже, будет ли оно немного больше или меньше, лишь бы мы, правильно пользуясь теми посылками, которые даны нам интуицией, научились правильно рассуждать.

11. Можно ли, однако, удовлетворить столь противоположным условиям? Возможно ли это в особенности тогда, когда приходится дать определение? Как найти такую краткую формулировку, которая одновременно удовлетворяла бы непреклонным правилам логики, нашему желанию понять то место, которое занимает новое понятие в совокупности знаний, нашей необходимости мыслить образами? Чаще всего такой формулировки найти нельзя, и вот почему недостаточно высказать определение: необходимо его подготовить и необходимо его оправдать.

Что я хочу этим сказать? Вы знаете, как часто говорят: всякое определение включает в себя аксиому, так как оно утверждает существование определенного объекта. Определение будет, следовательно, оправдано с точки зрения логической лишь тогда, когда будет доказано, что оно не находится в противоречии ни с терминами, ни с ранее допущенными истинами.

Но это не все. Определение теперь называют соглашением; но большинство умов возмутится, если вы захотите навязать это определение как соглашение произвольное. Они успокоятся только тогда, когда вы им дадите ответ на многочисленные вопросы, которые у них возникнут.

Чаще всего математические определения, как это показал Лиар, суть целые построения, составленные при помощи простейших понятий. Но почему эти элементы соединены именно данным образом, когда возможна еще тысяча других способов соединения? Каприз ли это? А если нет, то почему данная комбинация имеет больше прав на существование, чем все прочие? Какой необходимости она отвечает? Как можно было предвидеть, что она сыграет важную роль в развитии науки, что она сократит наши суждения и наши вычисления? Существует ли в природе некоторый особый предмет, который является, так сказать, неясным и грубым прообразом такой комбинации?

Это не все. Если вы ответите на эти вопросы удовлетворительно, то мы увидим, что принятую комбинацию нужно окрестить каким-либо именем. Но выбор имени не является произвольным. Нужно объяснить, какими аналогиями руководились, избирая имя. Если же аналогичное имя присваивалось различным вещам, то нужно показать, что эти вещи отличаются между собой только материально, по форме же близки друг к другу, что их свойства подобны и, так сказать, параллельны.

Вот какой ценой можно удовлетворить всем притязаниям. Если формулировка достаточно правильна, чтобы удовлетворить логика, то ее оправдание удовлетворит интуитивиста. Но лучше поступить иначе: необходимо, чтобы оправдание во всех случаях, когда это возможно, предшествовало формулировке и подготовляло ее; изучение нескольких частных примеров лучше всего приводит к общей формулировке.

Еще другое обстоятельство: каждая часть формулированного определения имеет целью установить отличие определяемого объекта от класса других близких предметов. Определение будет понято лишь тогда, когда вы покажете не только определяемый предмет, но и те соседние предметы, от которых его надобно отличать; когда вы сделаете явственным это отличие и при этом прибавите: «вот для чего я внес в определение то-то и то-то».

Теперь нам нужно перейти от общих суждений к исследованию вопроса, каким образом все изложенные мною несколько абстрактные принципы могут быть приложены в арифметике, геометрии, анализе и механике.

Арифметика

12. Нет нужды определять целое число; но зато обыкновенно определяют действия над целыми числами. Я предполагаю, что ученики выучивают определения наизусть и не связывают с ними никакого смысла. Для этого у меня есть два основания: во-первых, учеников заставляют заучивать определения слишком рано, когда их ум не чувствует в этом никакой потребности; во-вторых, даваемые им определения неудовлетворительны с логической точки зрения. Для сложения нельзя найти хорошее определение просто потому, что нельзя же все определить и необходимо где-нибудь остановиться. Сказать: «сложение заключается в прибавлении» — не значит дать определение. Все, что можно сделать, это взять за исходный пункт некоторое число конкретных примеров и сказать: «действие, которое мы сделали, называется сложением».

Иное дело при вычитании; его можно логически определить как действие, обратное сложению. Но следует ли с этого и начинать? И здесь надобно начать с примеров, выяснить на них взаимность этих двух действий; тогда определение будет и подготовлено и оправдано.

То же самое нужно сказать об умножении. Надо взять частную задачу и показать на ней, что она может быть разрешена, если складывать между собой равные числа. Затем уже можно показать, что к такому же результату можно прийти посредством умножения, т. е. посредством действия, которое учениками уже усвоено, и тогда логическое определение выяснится само собой.

Деление необходимо определить как действие, обратное умножению; но начать нужно с примера, заимствованного из повседневного обихода, например с деления какого-нибудь предмета на равные доли, и на этом примере показать, что делимое получается посредством умножения.

Остаются действия над дробями. Некоторые затруднения здесь представляет только умножение. Лучше изложить сначала теорию пропорций, так как только из нее можно извлечь логическое определение.

Но для того чтобы стали приемлемы те определения, которые встречаются в начале этой теории, необходимо предварительно воспользоваться многими примерами, заимствованными из классических задач на тройное правило, вводя в них дробные величины. Можно без боязни прибегать к геометрическим образам для ознакомления учеников с понятием о пропорции; для этого либо нужно вызвать в их памяти воспоминания, если они уже занимались геометрией, либо обращаться к их непосредственной интуиции, что, между прочим, подготовит их к занятию геометрией. Прибавлю, наконец, что, дав определение умножения дробей, необходимо оправдать это определение, показав, что умножение является действием переместительным, сочетательным и распределительным, а также указать при этом, что такое доказательство приводится для оправдания определения.

Отсюда видно, какую роль играют во всем этом геометрические образы, и эта роль оправдывается философией и историей науки. Если бы арифметика не имела никакой геометрической примеси, она знала бы только целые числа; для приспособления к нуждам геометрии она кроме них изобрела еще и нечто другое.

Геометрия

В геометрии мы встречаемся на первых шагах с понятием о прямой линии. Можно ли определить прямую линию? Обычное определение ее как кратчайшего расстояния от одной точки до другой меня не удовлетворяет. Я исходил бы просто из линейки и показал бы ученику, как можно проверить линейку, повернув ее другой стороной, такая проверка есть истинное определение прямой линии: прямая линия — это ось вращения. Затем надобно ученику показать, что линейку можно проверить посредством скольжения, и при этом обнаружится одно из наиболее важных свойств прямой линии. Что же касается того свойства, что прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками, то это уже теорема, которая может быть доказана аподиктически[1]), но это доказательство слишком тонко, чтобы найти себе место в курсе средней школы. Лучше было бы показать, что линейка, предварительно проверенная, налагается на натянутую проволоку. При всех затруднениях такого рода можно без опасений умножать число аксиом, оправдывая их даже на грубых примерах. Некоторое число аксиом необходимо должно быть допущено, и если число их немного превосходит то, которое строго необходимо, то беда еще невелика. Главное — это научить правильно рассуждать при помощи раз допущенных аксиом. Дедушка Сарсей[2]) часто говорил, что в театре зритель охотно принимает те постулаты, которые ему навязаны сначала, но раз занавес поднят, он становится неумолимым в своей логической требовательности. То же самое происходит в математике.

Для определения круга можно исходить из циркуля. Ученики с первого взгляда узнают начерченную кривую. Затем им покажут, что расстояние между двумя точками инструмента остается постоянным, что одна из этих точек неподвижна, а другая движется, и таким образом ученики естественно придут к логическому определению. Определение плоскости содержит в себе аксиому, этого не нужно скрывать. Возьмем рисовальную доску и покажем, что движущаяся линейка постоянно накладывается на эту плоскость, сохраняя при этом три степени свободы. Сравним затем плоскость с цилиндром и конусом, с поверхностями, на которые прямая может быть наложена только при сохранении двух степеней свободы. Возьмем далее три рисовальные доски и покажем сначала, что они, будучи наложены одна на другую, могут скользить при трех степенях свободы. И, наконец, чтобы установить различие между плоскостью и сферой, покажем, что две доски, накладывающиеся порознь на третью, накладываются также друг на друга.

Быть может, вас удивит это постоянное применение подвижных инструментов. Это не грубый прием, он более философский, чем это кажется с первого

---

[1]) Аподиктическим (*греч.*) называется такое доказательство, которое исключает возможность противного. — *Примеч. ред.*

[2]) Франциск Сарсей (1828—1899) — известный в то время французский театральный критик и журналист. — *Примеч. ред.*

взгляда. Что такое геометрия для философа? Это изучение некоторой группы. Какой именно? Группы движений твердых тел. Каким же образом определить эту группу, не заставляя двигаться некоторые твердые тела?

Должны ли мы сохранить классическое определение параллельных линий и сказать, что параллельными называются такие прямые, которые расположены в одной плоскости и никогда не встречаются, сколько бы их ни продолжали? Нет, ибо это определение отрицательное, оно не может быть проверено опытом и не может быть, следовательно, рассматриваемо как непосредственное данное интуицией. Определение это не может быть сохранено особенно еще потому, что оно совершенно чуждо понятию о группе, чуждо идее о движении твердых тел, которая, как я уже сказал, является истинным источником геометрии. Не лучше ли определить сначала прямолинейное переносное движение какой-либо неизменяемой фигуры как такое движение, в котором все точки этой фигуры описывают прямолинейные траектории, показать, что подобное перемещение возможно, когда треугольник скользит по линейке? Из экспериментального констатирования этого факта, возведенного в аксиому, легко было бы вывести как понятие о параллельной прямой, так и сам евклидов постулат.

Механика

Мне нет надобности останавливаться на определении скорости или ускорения, а также и других кинематических понятий; они с большим удобством могут быть отнесены к определению производной. Я остановлюсь, напротив, на динамических понятиях о силе и массе.

Одна вещь меня поражает, а именно: сколь многие молодые люди, получившие среднее образование, далеки от того, чтобы применять к реальному миру те механические законы, которые им были преподаны. И это не только потому, что они к этому неспособны, но и потому, что об этом даже и не думают. Для них мир науки и мир реальности отделены друг от друга непроницаемой перегородкой. Нередко можно видеть господина, прилично одетого, вероятно, бакалавра, сидящего в карете и воображающего, что он помогает ей двигаться, толкая ее вперед, вопреки принципу действия и противодействия.

Если мы попытаемся проанализировать душевное состояние наших учеников, то это нас менее удивит. Каково в их глазах настоящее определение силы? Не то определение, которое они произносят наизусть, но то скрытое в далеком углу их разума, которое из него всем управляет? Вот это определение: силы суть стрелы, при помощи которых составляются параллелограммы. Эти стрелы суть воображаемые существа, которые ничего общего не имеют с тем, что существует в природе. Но этого не случилось бы, если бы раньше, чем изображать силы при помощи стрелок, ученикам показали бы их в действительности.

Как же определить силу? Логическое определение, как я это показал в другом месте, вряд ли уместно. Есть определение антропоморфное: ощущение мускульного усилия, но оно поистине слишком грубо и ничего полезного из него извлечь нельзя.

Вот тот путь, по которому нужно следовать. Для того чтобы познакомить с понятием силы, нужно показать в последовательном порядке все виды этого понятия. Эти виды очень многочисленны и разнообразны, как-то: давление жидкостей на стенки сосудов, в которых они заключаются; напряжение проволок; упругость пружины; тяжесть, которая действует на все молекулы тела; трение; взаимное нормальное действие и противодействие двух твердых тел, касающихся друг друга.

Это определение, конечно, только качественное. Нужно научиться измерять силу. Здесь надобно сначала показать, что можно одну силу заменить другой, не нарушая равновесия. Первый пример такой замены мы найдем в рычажных весах и в двойном взвешивании Борда [1]). Мы покажем затем, что данный вес может быть заменен не только другим весом, но и силами, отличающимися по своей природе; на-

[1]) Борда (1733—1799) — французский ученый. Усовершенствовал способы точного взвешивания тел. — *Примеч. ред.*

пример, нажим Прони[1]) позволяет нам заменить вес трением.

Из всего этого вытекает понятие об эквивалентности двух сил.

Необходимо теперь определить направление силы. Если сила F эквивалентна другой силе F', приложенной к данному телу через посредство натянутой проволоки, так что сила F может быть заменена силой F' без всякого нарушения равновесия, то точка приложения проволоки будет, согласно определению, точкою приложения силы F' и, следовательно, эквивалентной силы F. Направление проволоки будет направлением силы F' и направлением эквивалентной силы F.

Отсюда мы переходим к сравнению величины сил. Если одна сила может заместить две другие одного и того же направления, значит, она равна их сумме; показать это можно на примере с гирей в 20 граммов, замещавшей две гири по 10 граммов.

Достаточно ли этого? Нет еще. Мы умеем сравнивать интенсивность двух сил, имеющих одно и то же направление и одну и ту же точку приложения. Нужно уметь производить сравнения и в том случае, когда направления различны. Для этого вообразим проволоку, перекинутую через блок и натянутую при помощи гири; мы скажем тогда, что натяжение обеих частей проволоки одинаково и равно весу натягивающего груза.

Вот наше определение. Оно позволяет нам сравнить натяжение двух частей проволоки или нити и, пользуясь предыдущими определениями, сравнить любые две силы, имеющие то же направление, что и обе нити. Нужно оправдать его, показав, что натяжение второй части нити остается тем же при том же натягивающем весе, каковы бы ни были число и расположение направляющих блоков. Нужно дополнить еще это определение, указав, что оно верно лишь в тех случаях, когда блоки не производят трения.

Дав эти определения, нужно показать, что точка приложения, направление и интенсивность достаточны

---

[1]) Прони (1755—1839) — французский ученый и инженер, которому принадлежит целый ряд работ по прикладной механике. Предложил нажим с рычагом для измерения работ машин. — *Примеч. ред.*

для определения силы; что две силы, у коих эти три элемента одинаковы, всегда эквивалентны и всегда могут друг друга заменить как в состоянии равновесия, так и в состоянии движения, и притом независимо от других сил, привходящих в систему.

Нужно показать, что две сходящиеся силы всегда могут быть заменены одной равнодействующей и что эта равнодействующая остается одной и той же как в том случае, когда тело остается в покое, так и в случае его движения, и притом независимо от других приложенных к нему сил.

Нужно показать, наконец, что силы, определенные таким образом, как мы показали, удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия.

Все это есть опыт, но только опыт и может нас этому научить.

Достаточно привести несколько примеров из тех обычных действий, которые ученики без всяких колебаний производят ежедневно, и сделать на их глазах несколько простых и хорошо подобранных опытов.

Когда ученики прошли по всем этим обходным путям, можно перейти к изображению сил при помощи стрелок, но я считал бы желательным, чтобы воспитатели, развивая в учениках способность рассуждать, возвращались время от времени от символа к реальности. Не представит труда, например, иллюстрировать параллелограмм сил при помощи прибора, составленного из трех нитей, проходящих через блоки и натянутых посредством грузов, которые уравновешивают друг друга в одной и той же точке.

Зная силу, легко определить массу. На этот раз определение должно быть заимствовано из динамики. Иначе этого сделать нельзя, так как цель, которой здесь хотят достигнуть, заключается в уяснении различия между массой и весом. Здесь определение также должно быть подготовлено рядом опытов. У нас есть машина, которая, как будто, нарочно создана для того, чтобы познать, что такое масса, это — машина Атвуда. Затем следует напомнить о законах падения тел, о том, что ускорение тяжести остается одним и тем же для тяжелых и легких тел, что оно изменяется вместе с географической широтой и т. д.

Если вы мне теперь скажете, что методы, которые я пропагандирую, давно уже применяются в лицеях, я буду более обрадован, чем удивлен. Я знаю, что в общем у нас обучение математике поставлено удовлетворительно. Я не хочу, чтобы оно было нарушено, это меня опечалило бы, я желаю лишь медленных прогрессивных улучшений. Это обучение не должно подвергаться крутым колебаниям и капризу преходящей моды. Его высокая воспитательная ценность померкла бы в такой буре. Здравая и прочная логика должна по-прежнему лежать в его основании. Определение, внушаемое при помощи примеров, всегда необходимо, но оно должно подготовлять определение, а не заменять его; оно должно по крайней мере выяснить желательность такого логического определения в тех случаях, когда это последнее с пользой для дела может быть дано лишь на ступени высшего обучения.

Вы, конечно, понимаете, что изложенными соображениями я отнюдь не отказываюсь от того, что писал раньше. Я часто имел случай критиковать некоторые определения, которые я теперь сам же предлагаю. Эта критика сохраняет всю свою силу. Определения, о которых идет речь, могут быть только предварительными. Но пройти через эти определения необходимо.

Глава III

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Введение

Можно ли математику свести к логике, не обращаясь предварительно к тем принципам, которые ей, математике, свойственны? Существует школа математиков, которая со всей страстью и верой в дело стремится доказать это. Она выработала специальный язык, в котором нет больше слов, а имеются одни только знаки. Этот язык понятен только немногим посвященным, так что профаны склонны преклоняться перед категорическими утверждениями горячих адептов. Небесполезно, однако, ближе исследовать эти утверждения, чтобы убедиться, насколько