Таким образом, несмотря на весь этот пасиграфический аппарат, вопрос не был разрешен. Что это доказывает? Когда вопрос идет только о том, чтобы доказать, что один есть число, пасиграфия достаточна; но если представляется затруднение, если возникает антиномия, требующая разрешения, то пасиграфия становится бессильной.

Глава IV

НОВЫЕ ЛОГИКИ

I

Логика Рассела

Чтобы оправдать свои притязания, логика должна была преобразоваться. Народились новые логики, среди которых наиболее интересной является логика Рассела. Казалось бы, что в области формальной логики ничего нового нельзя сказать и что Аристотель давно узрел ее основы. Но поле действия, которое Рассел отводит логике, бесконечно шире, чем поле классической логики, и Рассел сумел высказать в этом отношении оригинальные и часто правильные взгляды.

Между тем как логика Аристотеля была преимущественно логикой классов и за исходную точку брала отношение субъекта к предикату, Рассел прежде всего подчиняет логику классов логике предложений. Классический силлогизм «Сократ — человек и т. д.» уступает место гипотетическому силлогизму: если *A* истинно, то *B* истинно, но если *B* истинно, то *C* истинно и т. д.; и эта идея, на мой взгляд, одна из наиболее счастливых, ибо классический силлогизм легко свести к гипотетическому, тогда как обратное превращение представляет затруднение.

Но это не все: логика предложений Рассела есть этюд о законах, по которым комбинируются союзы «если», «и», «или» и отрицание «не». Это значительное расширение старой логики. Свойства классического силлогизма без труда распространяются на гипотетический силлогизм, и в формах последнего легко узнаются схоластические формы. Мы находим здесь то, что является существенным в классической логике. Но теория силлогизма есть еще не что иное, как синтаксис союза «если» и, быть может, отрицания.

Присоединяя два других союза — «и» и «или»,— Рассел открывает логике новую область. Знаки «и», «или» подчиняются тем же законам, что и знаки $\times$ и $+$, т. е. переместительному, сочетательному и распределительному законам. Таким образом, «и» представляет логическое умножение, тогда как «или» представляет логическое сложение. Это также весьма интересно.

Рассел приходит к выводу, что какое-нибудь ложное предложение заключает в себе и все прочие истинные или ложные предложения. Кутюра говорит, что этот вывод покажется на первый взгляд парадоксальным. Но кто исправлял плохую кандидатскую математическую работу, тот мог заметить, насколько правильно смотрит на дело Рассел. Кандидат часто много трудится для того, чтобы найти первое ложное уравнение; но лишь только он его получил, для него уже не представляет никакого труда сделать из него самые неожиданные выводы, из которых иные могут оказаться и точными.

II

Отсюда ясно, насколько новая логика богаче классической логики. Символы разрослись и сочетаются в разнообразные комбинации, число которых уже неограничено. Вправе ли мы так сильно расширять смысл слова «логика». Разбирать этот вопрос и вступать с Расселом в спор о слове — занятие бесцельное. Признаем то, чего требует Рассел, но не будем удивляться, если окажется, что некоторые истины, которые мы считали несводимыми к логике в старом смысле этого слова, теперь сводятся к новой логике, которая совершенно отличается от прежней.

Мы ввели большое число новых понятий, и эти понятия не были простыми комбинациями старых. Рассел на этот счет не обманывался; не только в начале первой главы, т. е. логики предложений, но в начале второй и третьей глав, т. е. логики классов и отношений, он вводит новые слова, которые принимает как определению не подлежащие.

Но это не все, он вводит также принципы, которые признает недоказуемыми. Но эти недоказуемые принципы являются обращениями к интуиции, являются априорными синтетическими суждениями. Мы принимали их за интуитивные, когда встречали их в более или менее явной форме в математических трактатах. Но изменился ли их характер от того, что смысл слова «логика» расширился и что мы находим их теперь в книге, носящей заголовок «Трактат по логике»? Они не изменили своей природы, они изменили лишь свое место.

III

Можно ли рассматривать эти принципы как скрытые определения?

Чтобы дать положительный ответ на этот вопрос, нужно было бы быть в состоянии доказать, что они не заключают в себе противоречия. Нужно установить, что, как бы далеко мы ни проводили ряд дедукций, мы никогда не впадем в противоречие с собой.

Можно было бы попытаться рассуждать таким образом. Мы можем проверить, что операции новой логики, будучи приложены к посылкам, не заключающим противоречия, приводят только к следствиям, также свободным от противоречия. Если, следовательно, после n операций мы не пришли к противоречию, то мы не придем к противоречию после $n+1$ операций. Невозможно, следовательно, наступление такого момента, когда противоречие началось бы, а это доказывает, что мы никогда не можем к нему прийти. Вправе ли мы так рассуждать? Нет, ибо это значило бы прибегнуть к полной индукции; принцип же полной индукции, будем это помнить, еще нам неизвестен.

Мы не вправе, следовательно, рассматривать эти аксиомы как скрытые определения, и нам остается только один исход: допустить для каждой из них новый акт интуиции. И такова именно, я думаю, мысль Рассела и Кутюра.

Таким образом, каждое из девяти неопределяемых понятий и каждое из двадцати недоказуемых предложений (я думаю, что если бы я считал, то насчитал бы их несколько больше), которые составляют основу новой логики, логики в широком смысле слова, предполагают акт новый, независимый от нашей интуиции, предполагают — почему этого не сказать? — настоящее синтетическое априорное суждение. В этом вопросе все, кажется, согласны. Но Рассел утверждает, что этими обращениями к интуиции дело и закончится, что в других обращениях не будет более нужды и можно будет построить всю математику, не вводя никакого нового элемента. Это мне и кажется сомнительным.

IV

Кутюра часто повторяет, что эта новая логика совершенно не зависит от идеи о числе. Я не стану подсчитывать, как часто в его изложении встречаются числительные, как количественные, так и порядковые, или неопределенные прилагательные, как, например, «несколько». Процитируем, однако, некоторые примеры:

«Логическое произведение двух или нескольких предложений есть...».

«Все предложения допускают только двоякую оценку: как истинные или как ложные».

«Относительное произведение двух отношений есть отношение».

«Отношение имеет место между двумя терминами» и т. д.

В некоторых случаях можно было бы избежать неудобства такого выражения, но иногда оно требуется существом дела. Отношение не может быть понято без двух терминов; нельзя иметь интуиции отношения, не имея в то же время интуиции двух его терминов; мало того, мы должны усмотреть, что есть два термина, ибо для того, чтобы можно было постигнуть отношение, необходимо, чтобы этих терминов было два и только два.

V

Арифметика

Я подхожу к тому, кто Кутюра называет теорией расположения (или порядка) и что является основанием арифметики в собственном смысле этого слова.

Кутюра начинает с формулировки пяти аксиом Пеано, независимость которых доказали Пеано и Падоа.

1. Нуль есть целое число.

2. Нуль не следует ни за каким целым числом.

3. Следующее за целым числом есть целое число; к этому следовало бы прибавить: всякое целое число имеет следующее за ним число.

4. Два целых числа равны, если равны следующие за ними числа.

Пятая аксиома есть принцип полной индукции.

Кутюра смотрит на эти аксиомы как на скрытые определения; они содержат выраженные при помощи постулатов определения нуля, целого числа и «следующего числа».

Но, как мы видели, для того чтобы основанное на постулатах определение могло быть принято, необходимо установить, что оно не заключает противоречия.

Имеем ли мы дело здесь с таким именно случаем? Нисколько.

Доказательства этого нельзя дать с помощью примера. Нельзя выбрать часть всех целых чисел, например первые три числа, и доказать, что они удовлетворяют определению.

Если я возьму ряд 0, 1, 2, то увижу, что он удовлетворяет аксиомам 1, 2, 4, 5. Но, для того чтобы он удовлетворял третьей аксиоме, необходимо еще, чтобы 3 было целым числом, следовательно, чтобы ряд 0, 1, 2, 3 удовлетворял всем аксиомам. При проверке окажется, что ряд 0, 1, 2, 3 удовлетворяет аксиомам 1, 2, 4, 5, но третья аксиома требует, сверх того, чтобы 4 было целым числом и чтобы ряд 0, 1, 2, 3, 4 удовлетворял всем аксиомам, и т. д.

Нет, следовательно, возможности доказать аксиомы для нескольких целых чисел, не доказывая их для всех. Приходится отказаться от доказательства путем примера.

Остается собрать все выводы из наших аксиом и рассмотреть, не заключают ли они в себе противоречия. Если бы число этих выводов было конечное, то это было бы легко сделать; но число выводов бесконечно велико, они охватывают всю математику или по крайней мере всю арифметику. Что же делать? Быть может, повторить рассуждение, указанное в разделе III.

Но мы уже сказали, что это рассуждение основано на полной индукции, а между тем дело идет именно о том, чтобы оправдать принцип полной индукции.

VI

Логика Гильберта

Я перехожу теперь к тому капитальному труду Гильберта, о котором последний сделал сообщение на Математическом конгрессе в Гейдельберге. Французский перевод этого труда, сделанный Пьером Бутру, появился в «Математическом образовании»; английский перевод, сделанный Халстедом, появился в «The Monist». В этом труде, изобилующем самыми глубокими мыслями, автор преследует такую же цель, как и Рассел, но во многих случаях отклоняется от своего предшественника.

«Если мы присмотримся ближе,— говорит он,— то мы заметим, что логические принципы, в той форме, в какой их обыкновенно представляют, уже включают в себя известные арифметические понятия, как, например, понятие совокупности, а, в некоторой мере, и понятие о числе. Таким образом, мы находимся как бы в заколдованном круге, и вот почему, во избежание всякого парадокса, мне кажется необходимым развивать одновременно логику и принципы арифметики».

Как мы видели выше, то, что Гильберт говорит о принципах логики в той форме, в какой их себе обыкновенно представляют, одинаково приложимо и к логике Рассела. Для Рассела логика предшествует арифметике; для Гильберта они «одновременны». Мы встретимся ниже с другими, более глубокими различиями, но мы будем их отмечать по мере того, как они перед нами предстанут; я предпочитаю следить шаг за шагом за развитием мысли Гильберта и цитировать текстуально наиболее важные места его работы.

«Рассмотрим прежде всего предмет 1». Заметим, что в это рассмотрение мы отнюдь не включаем понятия о числе, ибо само собой разумеется, что 1 в данном случае является только символом и что мы не стремимся узнать его значение. «Группы, образованные этим предметом, повторенным два, три или несколько раз...» Ну, здесь уже дело меняется; если мы вводим слова «два», «три», и, в особенности, «несколько», мы вводим понятие числа, а в таком случае понятие конечного целого числа, к которому нас приведет это рассуждение, окажется запоздалым. Автор был слишком предусмотрителен, чтобы не заметить этого petitio principii. В конце своего труда он пытается загладить погрешность.

Гильберт вводит затем два простых предмета 1 и =, рассматривает все комбинации из этих двух предметов, затем комбинации этих комбинаций и т. д. Само собой разумеется, что при этом нужно забыть обычное значение этих двух знаков, не нужно приписывать им никакого значения. Затем Гильберт распределяет эти комбинации в два класса, в класс «сущего» и в класс «не сущего», и впредь до следующего соглашения это распределение совершенно произвольно. Всякое утвердительное предложение показывает нам, что комбинация принадлежит классу сущего; всякое отрицательное предложение показывает, что известная комбинация относится к классу не сущего.

VII

Отметим теперь некоторое различие, имеющее важное значение. Для Рассела какой-нибудь предмет, который он обозначает буквой x, есть предмет абсолютно неопределенный, относительно которого он не делает никаких предположений; для Гильберта этот предмет есть одна из комбинаций, составленных из символов 1 и = не нужно представлять, будто здесь вводится что-либо новое помимо комбинации уже определенных предметов. Гильберт, впрочем, формулирует свою мысль самым точным образом, и я считаю необходимым воспроизвести его слова полностью: «Неопределенные, которые фигурируют в аксиомах (вместо понятий «нечто» и «все» обыкновенной логики), представляют собой исключительно совокупность предметов и комбинаций, которыми мы уже владеем при данном состоянии теории или которые мы начинаем вводить. Как только мы из рассматриваемых аксиом начнем выводить предложения, мы получим право заменять упомянутые предметы только этими предметами и этими комбинациями. Но если мы увеличиваем число основных предметов, то не нужно забывать, что тем самым аксиомы также испытывают новое расширение, и они, следовательно, должны быть снова проверены и, в случае нужды, изменены».

Здесь мы имеем полный контраст с точкой зрения Рассела. В той постановке, в какой вопрос ставится у этого философа, мы можем на место x ставить не только известные нам, но и какие угодно предметы. Рассел остается верным своей точке зрения, именно точке зрения понятия. Он исходит из общей идеи существующего и обогащает ее, придавая ей новые качества. Напротив, Гильберт считает существенными одни только комбинации известных уже предметов, так что (имея в виду лишь одну сторону его идеи) можно сказать, что Гильберт стоит на точке зрения объема понятий.

VIII

Проследим за изложением идей Гильберта. Он вводит две аксиомы, которые формулирует на своем символическом языке, но которые на языке таких профанов, как мы, обозначают, что всякое количество равно самому себе и что всякая операция, произведенная над двумя тождественными количествами, дает тождественные результаты. В такой формулировке аксиомы очевидны, но выразить их в таком виде значило бы исказить мысль Гильберта. С точки зрения Гильберта, математика комбинирует только чистые символы, и настоящий математик должен рассуждать о них, не заботясь об их смысле. Его аксиомы не являются для него тем же, чем они являются для обыкновенного человека.

Он рассматривает эти аксиомы как выраженное при помощи постулатов определение символа $=$, не опороченного еще каким-либо значением. Но чтобы оправдать это определение, необходимо доказать, что эти две аксиомы не ведут ни к какому противоречию.

Для этого Гильберт пользуется рассуждением, изложенным у него в разделе III, не замечая, по-видимому, что он прибегает к полной индукции.

IX

Конец мемуара Гильберта совершенно загадочен, и мы на нем не будем подробно останавливаться. Противоречия здесь умножаются; чувствуется, что автор сознает смутно petitio principii, в которое он впал, и что он напрасно старается замазать трещины своего рассуждения.

Что же это значит? В тот момент, когда необходимо доказать, что определение целого числа при помощи аксиомы полной индукции не влечет противоречия, Гильберт от этого отделывается, как отделываются Рассел и Кутюра, ибо трудность слишком велика.

X

Геометрия

Геометрия, говорит Кутюра, есть обширная область доктрин, в которой не фигурирует принцип полной индукции. В известной мере это верно; нельзя сказать, чтобы он совсем не входил, но он входит мало. Если обратиться к «Rational Geometry», написанной Халстедом (N. Y., John Wiley and Sons, 1904) и построенной на принципах Гильберта, то можно заметить, что принцип полной индукции появляется в первый раз на с. 114, если только я не пропустил его раньше, что очень возможно.

Таким образом, геометрия, которая еще несколько лет тому назад казалась областью, в которой господство интуиции бесспорно, является теперь областью, в которой торжествует логистика. Этим лучше всего измеряется важность геометрических трудов Гильберта и тот глубокий отпечаток, который они оставили на наших понятиях.

Но не нужно поддаваться обману. Какова в конце концов основная теорема геометрии? Она заключается в том, что аксиомы геометрии не заключают в себе противоречия, а это не может быть доказано без принципа индукции.

Как же Гильберт доказывает этот существенный пункт? Опираясь на анализ, через анализ на арифметику и через арифметику на принцип индукции.

И если когда-нибудь изобретут другое доказательство, то придется все же опереться на этот принцип, потому что выводов из тех аксиом, логическую совместимость которых нужно доказать, может быть бесконечное множество.

XI

Заключение

Наш вывод заключается прежде всего в том, что на принцип индукции нельзя смотреть как на скрытое определение целого числа.

Вот три истины:

принцип полной индукции;

постулат Евклида;

физический закон, согласно которому фосфор плавится при 44° (приводится у Леруа).

Говорят, что эти истины являются скрытыми определениями: первое есть определение целого числа, второе — прямой линии, третье — фосфора.

Я принимаю это для второй истины, но не принимаю для двух других. Объясню причину такой кажущейся непоследовательности.

Мы видели прежде всего, что определение приемлемо лишь в случае, если установлено, что оно не заключает в себе противоречия. Мы доказали также, что такое доказательство невозможно для первого определения; для второго, наоборот, Гильберт дал полное доказательство.

Что же касается третьего определения, то оно, очевидно, не заключает противоречия; но значит ли это, что определение, как это требовалось бы, с несомненностью свидетельствует о существовании определенного предмета? Мы выходим здесь из области математических наук и вступаем в область физических наук. Слово «существование» не имеет уже того смысла, что раньше, оно не обозначает отсутствия противоречия, а обозначает объективное существование.

Вот уже первое основание для различия, которое я делаю между вышеприведенными тремя случаями. Есть еще другое основание. Эти три понятия находят последующие применения; имеют ли эти понятия в применениях то значение, которое установлено этими тремя постулатами?

Возможные применения принципа индукции бесчисленны. Возьмем для примера одно из указанных нами выше применений, где мы стремились установить, что некоторая совокупность аксиом не может вести к противоречию. Для этого следует рассмотреть один из рядов силлогизмов, которые можно построить, исходя из этих аксиом как посылок.

Когда мы закончили n-й силлогизм, мы видим, что можно еще составить $(n+1)$-й силлогизм. Таким образом, число n служит для счета ряда последовательных операций, это — число, которое может быть получено путем последовательных прибавлений. Другими словами, это есть число, исходя из которого, можно прийти к единице путем последовательных вычитаний. Этого, очевидно, нельзя было бы достигнуть, если бы мы имели равенство $n = n - 1$, потому что в таком случае мы при вычитании всегда получали бы то же самое число. Таким образом, способ, при помощи которого мы пришли к рассмотрению этого числа n, заключает в себе определение конечного целого числа, и это определение гласит: конечное целое число есть такое число, которое может быть получено путем последовательных сложений, это есть число n, которое не равняется $n - 1$.

Приняв это, что делаем мы дальше? Мы показываем, что если нет противоречия с n-м силлогизмом, то не будет противоречия с $(n+1)$-м и не будет такого противоречия никогда. Вы скажете: я вправе сделать такое заключение, потому что целые числа по определению представляют собой такие именно числа, для которых подобное рассуждение законно. Но это приводит к другому определению целого числа, а именно к следующему: целое число есть такое число, о котором можно рассуждать в рекуррентном порядке. В данном случае это — число, о котором можно сказать следующее: если отсутствие противоречия в момент силлогизма, имеющего целый номер, влечет за собой отсутствие противоречия для силлогизма, имеющего следующий целый номер, то нет оснований опасаться противоречия для любого из силлогизмов, имеющего целый номер.

Оба определения не тождественны; они эквивалентны, без сомнения, но они таковы в силу априорного синтетического суждения: нельзя прийти от одного к другому путем чисто логических операций. Мы не вправе, следовательно, принять второе определение, раз мы ввели целое число, следуя такому пути, который предполагает первое определение.

Посмотрим, напротив, как обстоит дело с прямой линией. Я так часто уже говорил об этом, что не решаюсь снова повторять то же самое.

Мы не имеем здесь, как это было в предыдущем случае, двух эквивалентных определений, логически друг к другу несводимых. Мы имеем только одно определение, выраженное словами. Могут сказать, что мы имеем еще другое определение, которое мы чувствуем, но не можем выразить, потому что мы имеем интуицию прямой линии, или потому, что мы представляем себе прямую линию. Но, прежде всего, мы не можем представить себе этой линии в геометрическом пространстве, а можем представить лишь в пространстве, имеющемся в нашем представлении; и затем мы легко можем представить себе объекты, которые обладают всеми другими свойствами прямой линии, кроме того свойства, которое удовлетворяет постулату Евклида. Эти объекты суть «неевклидовы прямые», которые с известной точки зрения отнюдь не являются чем-то, лишенным смысла, но представляют собой окружности (настоящие окружности в настоящем пространстве), ортогональные к определенной сфере. Если из этих объектов, которые мы также можем себе представить, мы считаем прямыми первые, т. е. евклидовы прямые, а не последние, т. е. неевклидовы прямые, то это обусловливается определением.

Если мы, наконец, обратимся к третьему примеру, к определению фосфора, то мы увидим, что истинное определение будет таково: фосфор — это кусок вещества, который я вижу вот в этом флаконе.

XII

Остановившись уже на этом примере, скажу еще несколько слов. Относительно истины, касающейся фосфора, я выше сказал: «это предложение есть настоящий физический закон, доступный проверке, так

В итоге трудно поверить, в какой степени вера в астрологию оказалась полезной для человечества. Ежели Кеплер и Тихо Браге могли существовать, то это благодаря тому, что они продавали наивным королям предсказания, основанные на сочетаниях звезд. Если бы эти владетели не были столь легковерны, то мы, быть может, продолжали бы думать, что природа подчинена произволу, и до сих пор коснели бы в невежестве.

Глава VII

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1]

Прошедшее и будущее физики. Каково современное состояние математической физики? В чем состоят проблемы, к постановке которых она пришла? Каково ее будущее? Стоит ли ее развитие у поворотной точки? Предстанут ли десять лет спустя цель и методы этой науки пред нашими ближайшими преемниками в том же освещении, как перед нами, или, напротив, нам придется быть свидетелями коренного преобразования? Таковы те вопросы, которые мы вынуждены задать, приступая сегодня к нашему исследованию.

Если поставить их легко, то ответить на них трудно. Если бы мы почувствовали искушение вступить на рискованный путь предсказаний, то этому искушению легко было бы оказать противодействие, вспомнив все те нелепости, какие произносились сто лет тому назад самыми выдающимися учеными в ответ на вопрос: чем будет наука в XIX веке. Они считали свои предсказания смелыми; но какими робкими находим мы их теперь, после того как события произошли! Поэтому не ждите от меня пророчеств.

Но если я, подобно благоразумному врачу, отказываюсь делать прогноз, то все же не могу освободить себя от краткого диагноза: да, в самом деле имеются признаки серьезного кризиса, и нам как будто следует ждать близких перемен. Однако не

[1] Главы VII, VIII и IX представляют собой перепечатку известного доклада автора L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique на Конгрессе искусств и науки в Сент-Луисе в сентябре 1904 г. — *Примеч. ред.*