

лишь более или менее искаженные картины мира, которые создают ученые. Когда говорят, что природа подчиняется законам, под этим подразумевают, что такой портрет обладает достаточной степенью сходства. О нем и только о нем мы можем размышлять, не опасаясь, что сама идея закона, составляющая предмет нашего изучения, обратится в ничто. С другой стороны, эта картина мира может быть разложена: ее можно разбить на элементы и отличить в ней один от другого разные внешние признаки, независимые части. Если я иногда эти элементы упрощал и сводил рассуждения к очень малому числу элементов, то это только вопрос сложности; это ничего не изменяло ни в природе, ни в содержании моих рассуждений, лишь изложение становилось более сжатым.

Глава II

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

Одной из причин, побудивших меня вернуться к вопросу, которым я занимался неоднократно, является происшедший недавно переворот в наших взглядах на механику. Разве принцип относительности, как его понимает Лоренц, не должен заставить нас принять совершенно новые представления о пространстве и времени и разве он не заставит нас тем самым оставить уже окончательно установленные, казалось бы, выводы? Разве мы не говорили, что геометрия была создана нашим умом, конечно, в связи с опытом, но не из опыта, как нечто принудительно навязанное им, так что, однажды построенная, она уже недоступна никакой проверке, не боится никаких новых покушений со стороны опыта? И, однако, не кажется ли, что опыты, на которых основана новая механика, поколебали и геометрию? Чтобы разобраться во всем этом, я должен кратко напомнить некоторые из основных идей, которые я пытался развить в моих прежних работах.

Прежде всего я устраню понятие о мнимом чувстве пространства, которое будто бы позволяет нам локализовать наши ощущения в каком-то совершенно готовом пространстве, понятие о котором существует до всякого опыта и которое до всякого опыта уже

имеет все свойства пространства геометра. Что такое в сущности это мнимое чувство пространства? Какой опыт должны мы поставить, когда желаем убедиться, обладает ли им какое-нибудь животное? Мы помещаем поблизости от этого животного различные вещи, которых оно очень хочет, и наблюдаем, сумеет ли оно произвести сразу, без пробы, движения, необходимые для достижения этих вещей. А как убеждаемся мы в том, что другие люди обладают этим замечательным чувством пространства? Точно так же, замечая, что они способны сокращать надлежащим образом свои мускулы и достигать предметов, о присутствии которых им сообщили определенные ощущения. Наконец, как уверяемся мы в наличии этого чувства пространства в нашем собственном сознании? Здесь также, имея различные ощущения, мы знаем, что в состоянии произвести движения, позволяющие нам достигнуть предметов, в которых мы видим источник этих ощущений, и тем самым воздействовать на наши ощущения, заставить их исчезнуть или сделать их более интенсивными. Вся разница заключается лишь в том, что для этого нам нет надобности действительно производить эти движения, достаточно лишь представить их себе. Это чувство пространства, которого будто бы не в силах выразить интеллект, могло бы быть разве лишь какой-то особенной силой, заключенной в глубинах подсознательного, а в таком случае сила эта могла бы стать нам известной только через вызываемые ею действия; но эти действия и суть как раз те движения, о которых я только что говорил. Таким образом, чувство пространства сводится к некоторой постоянной ассоциации между определенными ощущениями и определенными движениями или к представлению этих движений (нужно ли во избежание постоянно повторяющихся, несмотря на мои неоднократные объяснения, недоразумений сказать еще раз, что я под этим понимаю не представление этих движений в пространстве, а представление сопутствующих им ощущений?).

Почему же и в какой мере пространство относительно? Ясно, что если бы наше тело и все окружающие нас предметы, равно как и наши измерительные инструменты, были перенесены в другую часть пространства, причем их взаимные положения не

изменились бы, то мы бы этого вовсе не заметили. В действительности это и имеет место, ибо мы уносимся, даже не догадываясь об этом, вместе с Землей в ее движении. Точно так же мы ничего не заметили бы, если бы все предметы увеличились в одно и то же число раз и если бы то же самое произошло с нашими измерительными инструментами. Таким образом, мы не только не можем знать абсолютного положения в пространстве какого-либо предмета, так что сами эти слова «абсолютное положение в пространстве» не имеют никакого смысла и следует говорить лишь о его относительном положении по отношению к другим предметам, но и выражения «абсолютная величина предмета», «абсолютное расстояние между двумя точками» также не имеют никакого смысла; можно говорить лишь об отношении двух величин, об отношении двух расстояний. Больше того, предположим, что все предметы деформируются согласно некоторому закону, более сложному, чем предыдущий, согласно, скажем, совершенно произвольному закону, и предположим, далее, что в то же самое время наши измерительные инструменты деформируются по тому же самому закону. Мы и этого не могли бы заметить, так что пространство гораздо более относительно, чем это обыкновенно думают. Мы можем заметить лишь те изменения формы предметов, которые отличаются от одновременных изменений формы наших измерительных инструментов.

Наши измерительные инструменты представляют собой твердые тела или же состоят из нескольких твердых тел, подвижных друг относительно друга, относительные перемещения которых отмечаются особыми реперами, помещенными на этих телах, или указателями, перемещающимися по градуированным шкалам; пользование инструментом сводится к отсчету этих показаний. Мы, таким образом, можем узнать, переместился ли наш инструмент наподобие неизменного твердого тела или нет, так как в этом случае рассматриваемые отсчеты не должны были измениться. В состав наших инструментов входят также и оптические трубы, с помощью которых мы производим отсчеты, таким образом, можно сказать, что лучи света тоже принадлежат к нашим инструментам.

Способна ли наша интуиция пространства дать нам нечто большее? Мы видели, что она сводится к некоторой постоянной связи между определенными ощущениями и определенными движениями. Это значит, что те члены, с помощью которых мы производим эти движения, играют, так сказать, тоже роль измерительных инструментов. Инструменты эти, менее точные, чем инструменты ученого, достаточны, однако, для нашей повседневной жизни. Именно с их помощью ребенок или первобытный человек измерили или, вернее, построили себе пространство, которым они довольствуются в нуждах своей повседневной жизни. Наше тело — наш первый измерительный инструмент. Как и прочие инструменты, оно состоит из нескольких твердых частей, подвижных друг относительно друга, причем определенные ощущения предупреждают нас об относительных перемещениях этих частей. Благодаря этому мы, как и в случае искусственных инструментов, можем узнать, переместилось ли наше тело наподобие неизменного твердого тела или нет. Словом, все наши инструменты, как те, которыми ребенок обязан природе, так и те, которыми ученый обязан своему гению, имеют в качестве основных частей твердое тело и световой луч.

Спрашивается, имеет ли при таких условиях пространство геометрические свойства, независимые от инструментов, которые служат для его измерения? Пространство может, как мы сказали, подвергнуться любой деформации, и ничто не откроет нам этого, если наши инструменты испытали ту же самую деформацию. Таким образом, пространство в действительности аморфно; оно рыхлая, лишенная твердости форма, которую можно приложить ко всему; оно не имеет своих собственных свойств. Заниматься геометрией — это значит изучать свойства наших инструментов, т. е. свойства твердого тела.

Но в таком случае, поскольку наши инструменты несовершенны, геометрия, казалось бы, должна изменяться со всяким новым усовершенствованием инструментов. Конструкторы должны были бы иметь право извещать в своих проспектах: «Предлагаю пространство гораздо более высокого качества, чем пространства моих конкурентов, гораздо более простое, более удобное, более комфортабельное». Но мы знаем, что

это не имеет места. Хотелось бы сказать, что геометрия — это учение о свойствах, которые имели бы инструменты, если бы они были совершенными. Но для этого надо было бы знать, что представляет собой совершенный инструмент, а мы этого не знаем, потому что таких инструментов нет и потому что мы могли бы определить идеальный инструмент лишь с помощью геометрии, т. е. впадая в порочный круг. Поэтому мы скажем, что геометрия представляет собой исследование определенной системы законов, мало отличающихся от тех, которым подчиняются в действительности наши инструменты, но гораздо более простых, законов, которым реально не подчиняется никакой естественный предмет, но которые постижимы умом. В этом смысле геометрия есть некоторое условное соглашение, своего рода компромисс между нашей любовью к простоте и нашим желанием не слишком удаляться от того, что нам сообщают наши инструменты. Это соглашение определяет одновременно как пространство, так и совершенный инструмент.

То, что мы сказали о пространстве, применимо и ко времени. Говоря это, я имею в виду не время, как его понимают ученики Бергсона, не ту длительность, которая не является чистым количеством, лишенным всякого качества, но которая является, так сказать, самим качеством, длительность, различные части которой, взаимно проникая друг друга, качественно друг от друга отличаются. Эта длительность не могла бы быть инструментом ученого; она могла бы стать им, лишь подвергнувшись коренному преобразованию, лишь «опространстившись», как говорит Бергсон. Действительно, необходимо, чтобы она стала измеримой; то, что недоступно измерению, не может быть и объектом науки. Но измеримое время по существу также относительно. Если бы все процессы в природе замедлились и если бы то же самое произошло с нашими часами, то мы бы ничего не заметили; это произошло бы при любом законе замедления, лишь бы оно было одним и тем же для всех решительно процессов и для всех часов. Таким образом, свойства времени — только свойства часов, подобно тому как свойства пространства — только свойства измерительных инструментов.

Это еще не все. Психологическое время, длительность Бергсона, из которой произошло время ученых, служит для классификации явлений, происходящих в одном и том же сознании. Оно непригодно для классификации двух психологических явлений, происходящих в двух различных сознаниях, а тем более двух физических явлений. Допустим, что некоторое событие происходит на Земле, другое — на Сириусе. Как узнать, происходит ли первое раньше второго, одновременно с ним или после него? Это может быть лишь делом условного соглашения.

Можно, однако, рассматривать относительность времени и пространства с совершенно иной точки зрения. Рассмотрим законы, которым подчиняется мир; они могут быть выражены с помощью дифференциальных уравнений. Мы констатируем, что эти уравнения не изменяются, если так изменить прямоугольную координатную систему, что она остается неподвижной, точно так же, как и при изменении начала времени или при замене прямоугольной системы неподвижных осей координат такими же, но подвижными осями, движущимися прямолинейно и равномерно. Позвольте мне назвать относительность психологической, если она рассматривается с первой точки зрения, и физической, если она рассматривается со второй точки зрения. Вы сразу же видите, что физическая относительность гораздо уже психологической. Мы сказали, например, что ничего не изменится, если умножить все длины на одну и ту же постоянную величину, лишь бы умножение распространялось на все предметы и на все инструменты. Но если мы умножим все координаты на одну и ту же величину, то возможно, что наши дифференциальные уравнения изменятся. Они изменятся, например, если мы введем подвижные вращающиеся оси, потому что в этом случае придется ввести в уравнения простую и составную центробежные силы. Таким именно образом опыт Фуко показал наглядно вращение Земли. В этом есть нечто, противоречащее нашим основным идеям об относительности пространства, идеям, основанным на психологической относительности. Это несогласие смущало многих философов.

Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее. Все части мира связаны между собой, и как ни далек

Сириус, он все-таки несколько действует на то, что происходит у нас. Поэтому если мы захотим написать дифференциальные уравнения, управляющие миром, то они или не будут точными или же должны будут зависеть от состояния всего мира. Не будет отдельной системы уравнений для мира Земли, а другой — для мира Сириуса; будет одна система, применимая ко всей Вселенной.

Но мы не наблюдаем непосредственно дифференциальных уравнений; мы наблюдаем лишь конечные уравнения, которые являются непосредственными выражениями наблюдаемых явлений и из которых дифференциальные уравнения получаются дифференцированием. Дифференциальные уравнения не изменяются, когда производят одну из тех замен координатных осей, о которых мы говорили выше. Иное происходит в случае конечных уравнений: изменение осей заставило бы нас изменить постоянные интегрирования. Таким образом, принцип относительности применяется не непосредственно к наблюдаемым конечным уравнениям, но к уравнениям дифференциальным. Но как перейти от конечных уравнений к тем дифференциальным уравнениям, интегралами которых они являются? Необходимо знать несколько частных интегралов, отличающихся друг от друга величинами постоянных интегрирования, и исключить эти постоянные дифференцированием. Только одно из этих решений осуществлено в природе, хотя их возможно бесчисленное множество. Чтобы построить дифференциальное уравнение, необходимо знать не только то решение, которое осуществлено, но также и все остальные, возможные.

Но если мы имеем лишь одну систему законов, применимую ко всей Вселенной, то опыт может дать нам только одно-единственное решение, то самое, которое фактически осуществлено, ведь Вселенная существует в одном экземпляре. Это — первая трудность.

Кроме того, в силу психологической относительности пространства мы можем наблюдать лишь то, что могут измерить наши инструменты. Они дают нам, например, расстояние между звездами или между различными рассматриваемыми нами телами. Они не дадут нам их координат по отношению к некоторым подвижным или неподвижным осям, существование

которых лишь дело условия. Если наши уравнения и содержат эти координаты, то только благодаря некоторой фикции, которая может быть удобной, но которая все же остается фикцией. Если мы желаем, чтобы наши уравнения прямо выражали то, что мы наблюдаем, то необходимо, чтобы расстояния непосредственно фигурировали в числе наших независимых переменных и тогда остальные переменные исчезнут сами собой. Это будет наш принцип относительности, но теперь уже лишенный всякого смысла. Он означает просто, что мы ввели в наши уравнения вспомогательные, добавочные переменные, не представляющие ничего осязаемого, и что их можно исключить.

Эти трудности исчезают, если не придерживаться абсолютной строгости. Различные части мира связаны между собой, но как только расстояние становится достаточно большим, их взаимодействие делается столь слабым, что мы вправе им пренебречь. А тогда наши уравнения разделятся на отдельные системы, причем одна окажется применимой только к земному миру, другая — к солнечному миру, третья — к миру Сириуса или даже к гораздо меньшим мирам, например таким, как лабораторный стол.

В таком случае уже нельзя сказать, что Вселенная существует лишь в одном экземпляре: в лаборатории может быть много столов, можно будет вновь провести известный опыт, изменив его условия. Тогда уже будет найдено не одно-единственное решение, осуществленное в действительности, но целый ряд возможных решений, и можно будет легко перейти от конечных уравнений к дифференциальным уравнениям.

С другой стороны, мы будем знать не только взаимные расстояния различных тел одного из этих маленьких миров, но также и их расстояния до тел соседних маленьких миров. Мы можем сделать так, что будут меняться только вторые расстояния, а первые останутся неизменными. Это все равно, как если бы мы изменили оси, к которым отнесен наш первый маленький мир. Звезды слишком удалены от нас, чтобы заметно воздействовать на наш земной мир, но мы их видим и благодаря этому можем относить земной мир к осям, связанным с этими звездами. Мы имеем способ измерить сразу взаимные расстояния земных тел и координаты этих тел по отношению к системе

осей, чуждой земному миру. Принцип относительности в этом случае приобретает определенный смысл, он становится доступным проверке.

Заметим, однако, что мы получили этот результат, пренебрегая известными действиями, но тем не менее мы не считаем наш принцип только приближенным, а приписываем ему абсолютное значение. Действительно, заметив, что он остается верным, как бы ни были удалены друг от друга наши маленькие миры, мы условно соглашаемся говорить, что он остается истинным для точных уравнений Вселенной. И это условное соглашение никогда нельзя будет опровергнуть, ибо принцип наш, взятый в применении ко всей Вселенной, недоступен проверке.

Вернемся теперь к случаю, о котором мы только что говорили. Дана некоторая система, относимая то к неподвижным, то к вращающимся осям. Изменяются ли при этом уравнения, выражающие ее движение? Да, отвечает обычная механика. Но верно ли это? Ведь то, что мы наблюдаем, — это не координаты тел, а их взаимные расстояния. Мы могли бы попытаться составить уравнения, которым подчиняются эти расстояния, исключив другие величины, являющиеся лишь добавочными, недоступными наблюдению переменными. Такое исключение всегда возможно. Но дело в том, что при сохранении координат мы получим дифференциальные уравнения второго порядка. Если же мы исключим все то, что недоступно наблюдению, то дифференциальные уравнения будут уже третьего порядка, так что останется значительно больше места для различных возможностей. При таком условии принцип относительности будет применим и в этом случае; при переходе от неподвижных осей к вращающимся эти уравнения третьего порядка не изменятся. Будут изменяться лишь уравнения второго порядка, определяющие координаты. Но эти уравнения второго порядка являются, так сказать, интегралами первых, и, как во все интегралы дифференциальных уравнений, в них входят постоянные интегрирования; эти-то постоянные и изменяются при переходе от неподвижных осей к вращающимся. Но так как мы предполагаем, что наша система совершенно изолирована в пространстве, т. е. рассматриваем ее как всю Вселенную, то мы не имеем никакой возможности убедиться в том, вра-

щается ли она. Значит, именно дифференциальные уравнения третьего порядка выражают то, что мы наблюдаем.

Вместо того чтобы брать всю Вселенную в целом, рассмотрим теперь наши маленькие разделенные миры, не имеющие механического воздействия друг на друга, но видимые один другому. Если один из этих миров вращается, то мы заметим его вращение. Мы найдем, что значение, которое следует приписать постоянной, о которой мы только что говорили, зависит от скорости вращения. Тем самым будет оправдано соглашение, обычно принимаемое механиками.

Мы видим, таким образом, каков смысл принципа физической относительности. Он уже не является больше простым условным соглашением, он доступен проверке и, значит, может быть опровергнут опытом. Он — экспериментальная истина. Каков же смысл этой истины? Его легко вывести из предыдущих соображений. Принцип этот означает, что взаимодействие двух тел стремится к нулю, когда эти тела удаляются бесконечно друг от друга. Он означает, что два удаленных друг от друга мира ведут себя так, как если бы они были независимы друг от друга. Теперь более понятно, почему принцип физической относительности менее универсален, чем принцип психологической относительности. Мы уже не видим в нем необходимости, вытекающей из самой природы нашего ума. Это — экспериментальная истина, которой опыт указывает границы.

Принцип физической относительности может служить нам для определения пространства. Он дает нам, так сказать, новый измерительный инструмент. Объяснюсь. Как может твердое тело служить нам для измерения или, правильнее, для построения пространства? Дело обстоит здесь следующим образом: перенося твердое тело из одного места в другое, мы замечаем, таким образом, что его можно приложить сперва к одной фигуре, потом к другой, и мы соглашаемся считать эти фигуры равными. Из этого соглашения родилась геометрия. Каждому возможному перемещению твердого тела в этом случае соответствует некоторое преобразование пространства самого в себя, не изменяющее форм и величин фигур. Геометрия есть не что иное, как учение о взаимных соотношениях этих

преобразований или, выражаясь математическим языком, учение о строении группы, образованной этими преобразованиями, т. е. группы движений твердых тел.

Возьмем теперь другую группу, группу преобразований, не изменяющих наших дифференциальных уравнений. Мы получаем новый способ определения равенства двух фигур. Мы уже не скажем более: две фигуры равны, когда одно и то же твердое тело может быть приложено и к одной и к другой. Мы скажем: две фигуры равны, когда одна и та же механическая система, удаленная от соседних систем настолько, что ее можно рассматривать как изолированную, будучи помещена сперва таким образом, что ее материальные точки воспроизводят первую фигуру, а затем таким образом, что они воспроизводят другую фигуру, ведет себя во втором случае так же, как и в первом.

Отличаются ли друг от друга существенным образом оба эти взгляда? Нет. Твердое тело принимает свою форму под влиянием взаимных притяжений и отталкиваний составляющих его молекул, и эта система сил должна быть в равновесии. Определить пространство таким образом, что твердое тело сохраняет свою форму при перемещении, — это все равно, что определить его тем, что уравнения равновесия этого тела не изменяются при изменении осей. Но эти уравнения равновесия представляют собой только частный случай общих уравнений динамики, которые в силу принципа физической относительности не должны изменяться при таком изменении осей.

Твердое тело — это такая же механическая система, как и всякая другая. Вся разница между нашими прежним и новым определениями пространства заключается в том, что последнее шире, позволяя заменить твердое тело любой другой механической системой. Более того, наше новое условное соглашение определяет не только пространство, но и время. Оно объясняет нам, что такое два одновременных момента, что такое два равных промежутка времени или же что такое промежуток времени, вдвое больший другого промежутка.

Еще одно замечание. Принцип физической относительности, сказали мы выше, является экспериментальным фактом в том же смысле, в каком им яв-

ляются свойства данных в природе твердых тел. Как таковой, он подвержен непрерывному пересмотру. Между тем геометрия не подлежит такому пересмотру, поэтому она должна быть условным соглашением, и принцип относительности должен рассматриваться как условное соглашение. Мы сказали выше, каков его экспериментальный смысл: он означает, что взаимодействие двух весьма удаленных друг от друга систем стремится к нулю, когда их взаимное расстояние бесконечно возрастает. Опыт показывает нам, что это приблизительно верно. Он не может показать нам, что это верно в точности, потому что расстояние между системами всегда останется конечным. Но ничто не мешает нам считать его в точности верным; ничто не помешало бы нам предположить это даже в том случае, если бы опыт обнаружил в принципе кажущуюся ошибку. Предположим, что взаимодействие двух тел, уменьшавшееся сперва с ростом расстояния, затем начало возрастать. Ничто не мешает нам предположить, что для еще большего расстояния оно снова начнет убывать, стремясь в пределе к нулю. В этом случае наш принцип получает характер условного соглашения и избавляется, таким образом, от посягательств опыта. Это — условное соглашение, которое подсказывает нам опыт, но которое мы принимаем добровольно.

В чем же заключается переворот, происшедший под влиянием новейших успехов физики? Принцип относительности в его прежней форме должен быть отвергнут, он заменяется принципом относительности Лоренца. Именно преобразования «группы Лоренца» не изменяют дифференциальных уравнений динамики. Если мы предположим, что наша система отнесена не к неподвижным осям, а к осям, обладающим переносным движением, то приходится допустить, что все тела деформируются, что шар, например, превращается в эллипсоид, малая ось которого совпадает с направлением переносного движения осей координат. В этом случае и само время испытывает глубокие изменения. Возьмем двух наблюдателей, из которых первый связан с неподвижными осями, второй — с движущимися, но оба считают себя находящимися в покое. Мы найдем, что не только та геометрическая фигура, которую первый считает шаром, будет казаться второму эл-

липсоидом, но что два события, которые первый будет считать одновременными, не будут таковыми для второго.

Все происходит так, как если бы время было четвертым измерением пространства и как если бы четырехмерное пространство, получающееся из соединения обычного пространства и времени, могло вращаться не только вокруг какой-нибудь оси обычного пространства, так что время при этом остается неизменным, но и вокруг любой оси. Чтобы сравнение было математически верным, этой четвертой координате пространства следует приписать чисто мнимое значение. Четырьмя координатами какой-нибудь точки нашего нового пространства уже будут не x, y, z и t , но x, y, z и $t\sqrt{-1}$. Но я не буду настаивать на этом пункте; важно лишь отметить, что в этом новом представлении пространство и время не являются уже двумя совершенно различными сущностями, которые можно рассматривать отдельно друг от друга, но двумя частями одного и того же целого, столь тесно связанными, что их не легко отделить друг от друга.

Другое замечание. Когда-то я пытался определить отношение между двумя событиями, происшедшими в двух различных местах, говоря, что одно можно считать предшествующим другому, если его можно рассматривать как причину этого другого. Это определение становится теперь недостаточным. В новой механике нет действий, которые переносятся мгновенным образом. Максимальная скорость передачи действия — это скорость света. При этих условиях может случиться, что событие A не может быть (при одном лишь рассмотрении пространства и времени) ни действием, ни причиной события B , если расстояние между теми местами, в которых они происходят, таково, что свет не может перенестись в надлежащее время ни от места B к месту A , ни от места A к месту B .

Каково же будет наше отношение к этим новым представлениям? Заставят ли они нас изменить наши заключения? Нисколько; мы приняли известное условное соглашение потому, что оно казалось нам удобным, и сказали, что ничто не заставит нас от него отказаться. Теперь некоторые физики хотят принять новое условное соглашение. Это не значит, что они были вынуждены это сделать; они считают это

новое соглашение более удобным — вот и все. А те, кто не придерживается их мнения и не желает откаться от своих старых привычек, могут с полным правом сохранить старое соглашение. Между нами говоря, я думаю, что они еще долго будут поступать таким образом.

Глава III

ПОЧЕМУ ПРОСТРАНСТВО ИМЕЕТ ТРИ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Analysis situs и непрерывность

Обыкновенно геометры различают два вида геометрий; первую они называют геометрией метрической, а вторую — проективной. Метрическая геометрия основана на понятии расстояния; две фигуры в ней считаются эквивалентными, когда они «равны» в том смысле, какой придают этому слову математики. Проективная же геометрия основана на понятии прямой линии. Чтобы две фигуры в ней рассматривались как эквивалентные, нет нужды, чтобы они были равными; достаточно того, чтобы можно было перейти от одной из них к другой с помощью проективного преобразования, т. е. чтобы одна из них была перспективой другой. Нередко эту вторую дисциплину называли качественной геометрией, и она действительно такова, если противопоставлять ее первой, метрической геометрии, ибо ясно, что измерение и количество играют в ней менее важную роль. Но все-таки она еще не полностью качественная. Тот факт, что какая-нибудь линия представляет собой прямую, не есть еще нечто чисто качественное. Нельзя убедиться в том, что какая-нибудь линия представляет собой прямую, не производя измерений или не налагая на эту линию линейки, являющейся особым измерительным инструментом.

Но есть третья геометрия, из которой совершенно изгнано количество и которая носит чисто качественный характер. Это — Analysis situs. В этой дисциплине две фигуры считаются эквивалентными всякий раз, когда можно непрерывной деформацией перейти от одной из них к другой независимо от того, каков бы ни был закон этой деформации, лишь бы он не нарушал непрерывности. Так, круг эквивалентен