новое соглашение более удобным — вот и все. А те, кто не придерживается их мнения и не желает отказываться от своих старых привычек, могут с полным правом сохранить старое соглашение. Между нами говоря, я думаю, что они еще долго будут поступать таким образом.

Глава III

ПОЧЕМУ ПРОСТРАНСТВО ИМЕЕТ ТРИ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Analysis situs и непрерывность

Обыкновенно геометры различают два вида геометрий; первую они называют геометрией метрической, а вторую — проективной. Метрическая геометрия основана на понятии расстояния; две фигуры в ней считаются эквивалентными, когда они «равны» в том смысле, какой придают этому слову математики. Проективная же геометрия основана на понятии прямой линии. Чтобы две фигуры в ней рассматривались как эквивалентные, нет нужды, чтобы они были равными; достаточно того, чтобы можно было перейти от одной из них к другой с помощью проективного преобразования, т. е. чтобы одна из них была перспективой другой. Нередко эту вторую дисциплину называли качественной геометрией, и она действительно такова, если противопоставлять ее первой, метрической геометрии, ибо ясно, что измерение и количество играют в ней менее важную роль. Но все-таки она еще не полностью качественная. Тот факт, что какая-нибудь линия представляет собой прямую, не есть еще нечто чисто качественное. Нельзя убедиться в том, что какая-нибудь линия представляет собой прямую, не производя измерений или не налагая на эту линию линейки, являющейся особым измерительным инструментом.

Но есть третья геометрия, из которой совершенно изгнано количество и которая носит чисто качественный характер. Это — Analysis situs. В этой дисциплине две фигуры считаются эквивалентными всякий раз, когда можно непрерывной деформацией перейти от одной из них к другой независимо от того, каков бы ни был закон этой деформации, лишь бы он не нарушал непрерывности. Так, круг эквивалентен эллипсу или даже любой замкнутой кривой, но он не эквивалентен отрезку прямой, так как этот отрезок не замкнут. Шаровая поверхность эквивалентна любой выпуклой поверхности, но не эквивалентна тору, потому что в торе есть отверстие, которого нет у шара. Представим себе какую-нибудь модель и копию с нее, сделанную неискусным художником. Пропорции здесь искажены, прямые, проведенные дрожащей рукой, имеют ненужные отклонения и представляют собой всякого рода искривления. С точки зрения метрической или даже проективной геометрии обе фигуры не эквивалентны, но они эквивалентны с точки зрения Analysis situs.

Analysis situs представляет собой очень важную для геометра науку. Она приводит к целому ряду теорем, столь же тесно связанных между собой, как и теоремы Евклида. На совокупности этих теорем Риман построил одну из самых замечательных и наиболее абстрактных теорий чистого анализа. Чтобы показать природу этой науки, я приведу две из этих теорем: две замкнутые плоские кривые пересекаются в четном числе точек; если многогранник выпуклый, т. е. если на его поверхности невозможно провести замкнутой кривой, не деля ее на две части, то число его ребер равно числу вершин плюс число граней без двух. Это верно даже тогда, когда ребра и грани этого многогранника кривые.

Analysis situs представляет для нас интерес тем, что именно здесь проявляется роль геометрической интуиции в чистом виде. Если в какой-нибудь теореме метрической геометрии обращаются к этой интуиции, то это делается потому, что невозможно изучать метрические свойства фигуры, отвлекаясь от ее качественных свойств, т. е. от тех свойств, которые составляют собственно предмет Analysis situs. Нередко говорят, что геометрия есть искусство хорошо рассуждать над плохо сделанными чертежами. Это — не просто шутливое замечание, это — истина, достойная того, чтобы над ней задумались. Но что такое плохо сделанный чертеж? Это такой чертеж, который может сделать тот неискусный художник, о котором мы говорили выше. Он искажает более или менее грубо все пропорции, его прямые линии все в изгибах, его круги имеют уродливые горбы, все это нисколько не меняет дела и нисколько не смущает геометра, все это не помешает ему правильно рассуждать.

Но не следует допускать, чтобы неопытный художник изобразил замкнутую кривую в виде незамкнутой, три пересекающиеся в одной точке линии — в виде трех линий, вовсе не имеющих общих точек, поверхность с отверстием — поверхностью без отверстия. В этом случае невозможно было бы уже пользоваться его чертежом, и рассуждение оказалось бы невозможным. Интуиции не мешают недостатки чертежа, затрагивающие метрическую или проективную геометрию, но она станет невозможной, как только эти недостатки затронут Analysis situs.

Это простое замечание показывает нам истинную роль геометрической интуиции. Именно чтобы помочь интуиции, геометр пользуется чертежами фигур или по крайней мере мысленно их себе представляет. Но если он легко поступается метрическими или проективными свойствами этих фигур, если он оказывает исключительное внимание их чисто качественным свойствам, то это потому, что здесь мы имеем дело с геометрической интуицией в чистом виде. Я не хочу сказать, что метрическая геометрия основана на чистой логике, что в ней вовсе не играют роли интуитивные истины. Но это — интуиции совсем другого рода, они аналогичны тем, которые играют значительную роль в арифметике и в алгебре.

Основное положение Analysis situs состоит в том, что пространство есть непрерывность трех измерений. Каково происхождение этого положения, я уже рассмотрел в другом месте, но очень кратко, и мне кажется не лишним остановиться на нем еще раз несколько подробнее, чтобы разъяснить некоторые пункты.

Пространство относительно. Я хочу этим сказать не только то, что мы можем быть перенесены в другую область пространства и не заметим этого (фактически это и происходит, ибо мы не замечаем переносного движения Земли), и не только то, что размеры всех предметов могут быть увеличены в одном и том же отношении, и мы не сможем этого заметить, если наши измерительные инструменты подвергнутся такому же увеличению; но я хочу сказать также, что пространство может быть деформировано по любому закону, лишь бы и наши измерительные инструменты были деформированы в точности по тому же самому закону.

Эта деформация может быть любой, однако она должна быть непрерывной, т. е. быть такой, которая преобразует какую-либо фигуру в другую, эквивалентную ей с точки зрения Analysis situs. Следовательно, пространство, рассматриваемое независимо от наших измерительных инструментов, не имеет ни метрических, ни проективных свойств. Оно имеет лишь топологические свойства (т. е. свойства, которые изучает Analysis situs). Оно аморфно, т. е. оно не отличается от такого пространства, которое может быть выведено из него произвольной непрерывной деформацией. Чтобы пояснить свою мысль, я воспользуюсь математическим способом выражения. Рассмотрим два пространства E и E'. Точка M в пространстве E соответствует точке M' в пространстве E'. Точка M имеет прямоугольные координаты x, y и z; точка M' имеет прямоугольные координаты в виде трех каких-либо непрерывных функций x, y и z. С интересующей нас точки зрения оба эти пространства не отличаются друг от друга.

В другом месте я подробно разъяснил, как введение наших измерительных инструментов и в особенности твердых тел позволяет уму определить и более полно организовать это аморфное пространство, как оно позволяет проективной геометрии провести в нем сеть прямых линий, а метрической геометрии измерить расстояния между его точками, какую существенную роль играет в этом процессе основное понятие группы. Я считаю все эти вопросы разобранными и не буду к ним возвращаться.

Единственным нашим предметом здесь является аморфное пространство, изучаемое Analysis situs, единственное пространство, не зависящее от наших измерительных инструментов, и его основное свойство (я чуть было не сказал, его единственное свойство) быть непрерывностью трех измерений.

2. Непрерывность и сечения

Но что такое непрерывность n измерений? Чем отличается она от непрерывности с меньшим или большим числом измерений? Напомним сначала некото-