

как кожа может изгибаться во всех направлениях. Здесь появляется искушение сказать, что это и есть то истинное пространство, в котором мы пытаемся локализовать все наши другие ощущения. Но это еще далеко не так. Вследствие подвижности глаза одной и той же точке сетчатки при одной и той же величине конвергенции глаз не всегда соответствует одна и та же точка пространства. Но это не все: непонятно, почему было введено третье измерение, столь отличное от двух других измерений, и почему пространство слепых тождественно с нашим пространством.

Если пожелаем скомбинировать зрительное пространство с осязательным, то получим 5 измерений вместо 3 или 2. Тогда необходимо объяснить, как эти 5 измерений сводятся к 3. Если же ввести в комбинации еще и другие чувства, то число измерений возрастет еще больше.

Словом, остается объяснить, почему зрительное и осязательное пространства представляют собой одно и то же пространство.

#### 4. Пространство и движения

По-видимому, нельзя построить пространство, рассматривая совокупности одновременных ощущений, и нужно рассмотреть последовательности ощущений. Необходимо вернуться к тому, что мною уже было сказано. Почему некоторые изменения представляются нам как изменения положения, в то время как другие изменения представляются изменениями состояния, не имеющими геометрического характера? Чтобы понять это, мы должны сначала различать изменения внешние, не произвольные и не сопровождаемые мускульными ощущениями, и внутренние изменения, которые являются движениями нашего тела и которые мы отличаем от других потому, что они произвольны и сопровождаются мускульными ощущениями. Внешнее изменение всегда может быть исправлено внутренним изменением, например, когда мы следим глазами за движущимся предметом и таким образом приводим всегда его изображение на одно и то же место сетчатки. Внешнее изменение, которое может быть исправлено подобным образом, представляет собой изменение положения; если оно

недоступно такому исправлению, то это есть изменение состояния.

Два внешних изменения, которые с качественной точки зрения совершенно различны, считаются соответствующими одному и тому же изменению положения, если они могут быть исправлены одним и тем же внутренним изменением. Точно так же два внутренних изменения могут состоять из последовательных рядов совершенно различных мускульных ощущений и в то же время соответствовать одному и тому же изменению положения, если они могут исправить одно и то же внешнее изменение. Это то, что на нашем обычном языке мы выражаем словами: «из одной точки в другую можно прийти многими путями». Что в этом случае важно, так это те движения, которые необходимо произвести, чтобы достичь определенного объекта, причем сознание этих движений есть для нас не что иное, как совокупность сопутствующих им мускульных ощущений.

Теперь положим, что некоторый предмет касается одного из моих пальцев, например указательного пальца правой руки. Этот факт вызывает у меня осязательное ощущение  $T$ . Но в то же время я получаю от этого предмета и зрительное ощущение  $V$ . Предмет удаляется, ощущение  $T$  исчезает, ощущение  $V$  заменяется новым зрительным ощущением  $V'$ . Это — внешнее изменение. Я хочу исправить отчасти это внешнее изменение, восстановив ощущение  $T$ , т. е. хочу привести мой указательный палец в соприкосновение с предметом. Для этого я должен выполнить определенные движения, которые выражаются для меня некоторой последовательностью мускульных ощущений  $S$ . Я это знаю, так как многочисленные опыты, произведенные частью мною самим, частью — моими предками, научили меня, что если ощущение  $T$  пропадает, а зрительное ощущение переходит из  $V$  в  $V'$ , то можно восстановить ощущение  $T$  движениями, соответствующими последовательному ряду  $S$ . Я знаю также, что мог бы получить тот же самый результат с помощью других движений, выражающихся для меня уже не последовательностью  $S$ , но другими последовательностями  $S'$  и  $S''$ .

Все эти последовательные ряды мускульных ощущений  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ , ... не имеют, может быть, ни одного

общего элемента. Я сближаю их между собой потому, что и те и другие позволяют мне восстановить ощущение  $T$  всякий раз, как ощущение  $V$  изменилось на  $V'$ . На нашем обычном языке, будучи знакомы с геометрией, мы скажем, что у различных последовательных рядов движений, соответствующих последовательным рядам мускульных ощущений  $S, S', S''$ , общим будет то, что у всех у них начальное и конечное положения моего указательного пальца одинаковы. Во всем остальном могут быть различия.

Таким образом, я поневоле перестаю различать эти различные последовательности  $S, S', S''$  и начинаю рассматривать их как нечто одно. Точно таким же образом я перестаю различать последовательности мускульных ощущений, слишком мало от них отличающиеся. В таком случае у меня есть из чего строить физическую непрерывность. Действительно, я нашел элементы непрерывности, которые являются последовательностями мускульных ощущений, и я обладаю «основным соглашением», которое указывает мне, в каких случаях я должен считать два таких элемента тождественными. Именно эта непрерывность и обладает тремя измерениями.

Но это не все. Выше мы описали некоторую непрерывность, которая является настоящим пространством. Это — пространство, описанное одним из моих пальцев. Но у меня несколько пальцев (а с интересующей нас точки зрения любая точка моей кожи могла бы служить таким пальцем). Опишут ли мои различные пальцы одно и то же пространство? Конечно, да, но что, собственно, это значит? Это предполагает определенную совокупность свойств, которую было бы нелегко выразить на обычном языке, но я надеюсь ее объяснить, если мне позволят прибегнуть к некоторым символам. Я рассматриваю два пальца, которые я назову  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть пальцем  $\alpha$  будет, например, указательный палец правой руки, которым мы воспользовались для определения последовательностей  $S, S', S'', \dots$ . Мы запишем это так:

$$S \equiv S' \pmod{\alpha}.$$

Это означает, что если движения, соответствующие  $S$ , восстанавливают осязательное ощущение пальца  $\alpha$ , то то же самое действие окажут и движе-

ния, соответствующие  $S'$ , и наоборот. Аналогичным образом я напишу:

$$S_1 = S'_1 \pmod{\beta},$$

чтобы выразить этим, что если движения, соответствующие  $S_1$ , восстанавливают осязательное ощущение пальца  $\beta$ , то то же самое произведут и движения, соответствующие  $S'_1$ .

Теперь я предположу, что существуют две особенные последовательности мускульных ощущений  $s$  и  $s_1$ , определяемые следующим образом: я предполагаю, что палец  $\beta$  испытывает осязательное ощущение от прикосновения к некоторому предмету; произведем движения, соответствующие  $s$ , это ощущение исчезнет, но в конце концов ощущение от прикосновения испытает палец  $\alpha$ . Я знаю по опыту, что это будет иметь место всякий раз, когда перед тем, как произошли эти движения, палец  $\beta$  испытывал прикосновение, или по крайней мере почти всякий раз (я говорю «почти», ибо для удаи опыта необходимо, чтобы за время между двумя прикосновениями предмет не сдвинулся с места). На нашем обычном языке (который был бы понятнее для нас, но который я не смею употреблять, так как говорю о существах, не знающих еще геометрии) мы бы сказали, что движения, соответствующие  $s$ , привели палец  $\alpha$  на место, занятое первоначально пальцем  $\beta$ . В случае  $s_1$ , наоборот, соответствующие движения приводят палец  $\beta$  на место, первоначально занимаемое пальцем  $\alpha$ . Если две эти последовательности  $s$  и  $s_1$  существуют, то соотношение

$$S \equiv S' \pmod{\alpha}$$

будет иметь следствием соотношение

$$s + S + s_1 \equiv s + S' + s_1 \pmod{\beta}.$$

В этом легко убедиться непосредственно, вспомнив смысл этих символов. Отсюда можно вывести без труда, что два пространства, образованные  $\alpha$  и  $\beta$ , изоморфны и, в частности, они имеют одно и то же число измерений.

Дело обстоит бы иначе, если бы последовательности  $s$  и  $s_1$  не существовали. Действительно, допустим, что невозможно найти такую последователь-

ность движений, при которой на смену ощущения прикосновения пальца  $\beta$  к некоторому предмету появлялось бы ощущение прикосновения пальца  $\alpha$  к тому же предмету. Как бы мы стали рассуждать в этом случае? Мы сказали бы, что палец  $\beta$  ощущает предмет, не находясь с ним в одной и той же точке пространства, что он его ощущает на расстоянии. Если бы это было не так, то всякий раз, когда палец  $\beta$  ощущал бы предмет, последний должен был бы находиться в одной и той же с ним точке  $A$  пространства. В таком случае должна была бы существовать последовательность движений, приводящих палец  $\alpha$  в точку  $A$ . И так как предмет находится в точке  $A$ , то палец  $\alpha$  должен был бы ощущать предмет, и это должно было бы происходить всегда. Итак, предполагая, что нет последовательности движений, обладающей этим свойством, приходится допустить, что палец ощущает предмет на расстоянии, т. е. что ощущения, испытываемого этим пальцем, недостаточно для определения положения предмета в пространстве, т. е., наконец, что пространство должно обладать большим числом измерений, чем физическая непрерывность, полученная с помощью пальца  $\beta$  указанным нами способом.

Я предположу, например, что пространство имеет четыре измерения, и обозначу буквами  $x, y, z, t$  четыре координаты. Я предположу, что палец  $\beta$  ощущает прикосновение предмета всякий раз, когда три координаты  $x, y$  и  $z$  одни и те же для пальца и предмета, каково бы ни было значение четвертой координаты; с другой же стороны, я предположу, что палец  $\alpha$  ощущает прикосновение предмета всякий раз, когда три координаты  $x, y, t$  одни и те же для предмета и для пальца, какова бы ни была при этом координата  $z$ . Воспользуемся теперь нашими правилами для построения физической непрерывности, образованной с помощью  $\beta$ . Так как координата  $t$  не играет никакой роли, то мы найдем у этой непрерывности лишь три измерения, соответствующие трем координатам  $x, y, z$ . Точно так же физическая непрерывность, полученная с помощью  $\alpha$ , будет иметь три измерения, соответствующие координатам  $x, y$  и  $t$ . Но мы не сможем пайти такой последовательности движений, соответствующей последовательности мускуль-

ных ощущений  $s$ , которая бы заменяла ощущение прикосновения  $\alpha$  ощущением прикосновения  $\beta$ .

Действительно, пусть  $x_1, y_1, z_1, t_1$  будут координаты предмета,  $x_0, y_0, z_0, t_0$  — координаты пальца  $\beta$  до движения,  $x'_0, y'_0, z'_0, t'_0$  — координаты пальца  $\alpha$  после движения. Мы выразим, что палец  $\beta$  ощущает прикосновение до движения, написав

$$x_0 = x_1, \quad y_0 = y_1, \quad z_0 = z_1. \quad (1)$$

Мы выразим, что  $\alpha$  ощущает прикосновение после движения, написав

$$x'_0 = x_1, \quad y'_0 = y_1, \quad t'_0 = t_1. \quad (2)$$

Для того чтобы существовало  $s$ , необходимо, чтобы мы могли выбрать  $x_0, y_0, z_0, t_0, x'_0, y'_0, z'_0, t'_0$  такими, чтобы соотношения (1) влекли за собой соотношения (2), каковы бы ни были  $x_1, y_1, z_1, t_1$ . Ясно, что это невозможно. Именно невозможность образовать  $s$  и показывает нам в подобном случае, что пространство будет иметь 4 измерения, а не 3, как физическая непрерывность, образованная с помощью  $\beta$ .

Мы, впрочем, и наблюдаем нечто подобное, когда привлекаем к рассмотрению чувство зрения. Рассмотрим какую-нибудь точку сетчатки. Мы можем заставить ее играть ту же роль, что и наши пальцы  $\alpha$  и  $\beta$ . Мы можем рассмотреть последовательность движений, необходимых для того, чтобы привести изображение какого-нибудь предмета в эту точку  $\gamma$  сетчатки, или же последовательность соответствующих мускульных ощущений  $S$ . Мы можем воспользоваться этой последовательностью, для того чтобы определить физическую непрерывность, аналогичную той, которая была получена с помощью  $\alpha$  или  $\beta$ . Эта непрерывность будет иметь только два измерения. Но мы не можем построить последовательности, аналогичной  $s$ , т. е. последовательности движений, которые наверняка вызовут вслед за зрительным ощущением в точке  $\gamma$  осязательное ощущение пальца  $\alpha$ . Иными словами, недостаточно констатировать, что зрительное изображение предмета дается в  $\gamma$ , чтобы иметь возможность определить движения, необходимые для того, чтобы привести наш палец в соприкосновение с этим предметом. Нам недостает одного данного —

расстояния до предмета. Вот почему мы говорим, что видение происходит на расстоянии и что пространство имеет три измерения, т. е. на одно больше, чем непрерывность, образованная с помощью  $\beta$ .

В этом кратком изложении мы показали, каковы те экспериментальные факты, которые заставляют нас приписывать пространству три измерения. Ввиду этих фактов нам было удобнее приписать ему три измерения, а не четыре или два. Но слово «удобный», пожалуй, в данном случае недостаточно сильно. Существо, которое приписало бы пространству два или четыре измерения, оказалось бы в мире, подобном нашему, менее приспособленным к борьбе за существование. Что это значит в действительности? Я позволю себе вернуться к моим символам, например к соотношениям

$$S \equiv S' \pmod{\alpha},$$

смысл которых я объяснил выше. Приписать пространству два измерения — это значило бы допустить такие соотношения, которых мы, люди, не допускаем. В этом случае пришлось бы предположить возможность заменить движения  $S$ , достигающие цели, движениями  $S'$ , которые цели не достигают. Приписать же пространству четыре измерения значило бы, наоборот, отбросить такие соотношения, которые мы, люди, допускаем. В этом случае пришлось бы отказаться от возможности заменить движения  $S$  другими движениями  $S'$ , точно так же достигающими цели, которые могли бы при известных обстоятельствах представить некоторые особые удобства.

## 5. Пространство и природа

Но вопрос может быть поставлен и с совершенно иной точки зрения. Мы до сих пор рассматривали его с чисто субъективной, чисто психологической или, если угодно, физиологической стороны. Мы рассматривали лишь отношения между пространством и нашими чувствами. Можно было бы, наоборот, встать на точку зрения физики и спросить себя: нельзя ли локализовать явления природы в пространстве, отличном от нашего, например в пространстве двух или четырех измерений? Физические законы вы-