

расстояния до предмета. Вот почему мы говорим, что видение происходит на расстоянии и что пространство имеет три измерения, т. е. на одно больше, чем непрерывность, образованная с помощью β .

В этом кратком изложении мы показали, каковы те экспериментальные факты, которые заставляют нас приписывать пространству три измерения. Ввиду этих фактов нам было удобнее приписать ему три измерения, а не четыре или два. Но слово «удобный», пожалуй, в данном случае недостаточно сильно. Существо, которое приписало бы пространству два или четыре измерения, оказалось бы в мире, подобном нашему, менее приспособленным к борьбе за существование. Что это значит в действительности? Я позволю себе вернуться к моим символам, например к соотношениям

$$S \equiv S' \pmod{\alpha},$$

смысл которых я объяснил выше. Приписать пространству два измерения — это значило бы допустить такие соотношения, которых мы, люди, не допускаем. В этом случае пришлось бы предположить возможность заменить движения S , достигающие цели, движениями S' , которые цели не достигают. Приписать же пространству четыре измерения значило бы, наоборот, отбросить такие соотношения, которые мы, люди, допускаем. В этом случае пришлось бы отказаться от возможности заменить движения S другими движениями S' , точно так же достигающими цели, которые могли бы при известных обстоятельствах представить некоторые особые удобства.

5. Пространство и природа

Но вопрос может быть поставлен и с совершенно иной точки зрения. Мы до сих пор рассматривали его с чисто субъективной, чисто психологической или, если угодно, физиологической стороны. Мы рассматривали лишь отношения между пространством и нашими чувствами. Можно было бы, наоборот, встать на точку зрения физики и спросить себя: нельзя ли локализовать явления природы в пространстве, отличном от нашего, например в пространстве двух или четырех измерений? Физические законы вы-

ражаются дифференциальными уравнениями, а в этих уравнениях фигурируют три координаты материальных точек. Разве невозможно выразить эти же самые законы другими уравнениями, в которых на этот раз фигурировали бы другие материальные точки, имеющие четыре координаты? Или, может быть, это и возможно, но полученные таким образом уравнения не оказываются ли менее простыми? Или, наконец, если эти уравнения столь же просты, как и наши обычные уравнения, то не отбрасываем ли мы их только потому, что они нарушают наши умственные привычки?

Что, собственно, хотим мы сказать, говоря о выражении тех же самых законов другими уравнениями? Предположим, что перед нами два мира M и M' . Мы можем установить между явлениями, которые происходят в этих мирах или которые могли бы в них происходить, такого рода соответствие, что всякому явлению Φ первого мира будет соответствовать вполне определенное явление Φ' второго мира, которое было бы, так сказать, его изображением. Если теперь я предположу, что необходимым следствием явления Φ в силу законов, управляющих миром M , оказывается определенное явление Φ_1 , а необходимым следствием явления Φ' , изображения Φ , в силу законов, управляющих миром M' , будет Φ'_1 , точное изображение явления Φ_1 , то мы сможем сказать, что оба мира подчиняются одним и тем же законам. Нас мало интересует качественная природа явлений Φ и Φ' , нам достаточно лишь, чтобы был возможен «параллелизм».

Действительно, эта качественная природа явлений затрагивает лишь наши чувства, а мы условились встать на внепсихологическую точку зрения, следовательно, условились абстрагироваться от данных наших чувств и обращать внимание только на взаимоотношения явлений. Так именно и поступает физик, когда он, например, заменяет газы, данные нам в опыте и вызывающие у нас ощущения давления и теплоты, газами кинетической теории, являющимися просто движущимися материальными точками, или когда он заменяет свет, получаемый в опыте и вызывающий у нас цветовые ощущения, колебаниями эфирной среды.

Достаточно рассмотреть какой-нибудь простой случай, например астрономические явления и закон Ньютона. Мы наблюдаем не координаты небесных светил, а только их взаимные расстояния. Поэтому естественным выражением законов их движения будут дифференциальные уравнения, связывающие эти расстояния со временем. Но расстояние между двумя точками в пространстве представляет собой известную простую функцию координат этих двух точек. Преобразуем наши дифференциальные уравнения, подставив в них эту функцию вместо всех расстояний. Мы получим тогда эти уравнения в их обычной форме, где фигурируют сами координаты светил.

Но мы могли бы заменить эти расстояния другими функциями и получили бы тогда другие формы этих уравнений. Все эти формы были бы одинаково правомерны с интересующей нас точки зрения, так как в них соблюден «параллелизм» между явлениями. Представим себе звезды расположенными в четырехмерном пространстве, так что положение каждой из них определяется уже не тремя, а четырьмя координатами. Заменяем далее в наших уравнениях величину, представлявшую для нас до сих пор расстояние между двумя светилами, какой-нибудь функцией восьми координат этих двух светил. Нет никакой необходимости, чтобы эта функция была той самой, которая представляет расстояние между двумя точками в четырехмерном пространстве; она может быть совершенно произвольной, так как это нисколько не нарушает «параллелизма».

Мы получим, таким образом, некоторую форму наших уравнений, в которых будут фигурировать координаты светил в четырехмерном пространстве. Это будет новое выражение астрономических законов, основанное на гипотезе четырехмерного пространства, и выражение это будет вполне правомерно, потому что условие «параллелизма» соблюдено. Ясно только, что полученные таким образом уравнения будут гораздо менее простыми, чем наши обычные уравнения.

То же самое, без сомнения, будет и с другими законами физики. Нет ли какого-нибудь общего основания тому факту, что во всех разделах физики гипотеза трех измерений дает уравнениям наипростей-

шую форму? И имеет ли это основание что-нибудь общее с развитыми выше соображениями, в силу которых живые существа вынуждены верить в три измерения или поступать так, как если бы они верили в это под угрозой ослабления в борьбе за существование?

Здесь необходимо небольшое отступление. Вернемся на минуту к нашему старому обычному пространству. Мы говорим, что оно относительно, и это значит, что законы физики одни и те же во всех частях этого пространства или, на математическом языке, что дифференциальные уравнения, выражающие эти законы, не зависят от выбора осей координат.

Если рассматривать совершенно изолированную систему, то это не имеет никакого смысла: ведь наблюдать координаты точек этой системы невозможно, можно наблюдать только их взаимные расстояния. Наблюдение не может сообщить нам о том, зависят ли свойства этой системы от ее абсолютного положения в пространстве, так как это положение недоступно наблюдению.

Если же система не изолирована, то опять-таки, если мы станем рассуждать вполне строго, то окажемся в затруднении, потому что невозможно станет выражать законы, управляющие этой системой, не считаясь с действием внешних тел. Но существуют системы, почти изолированные, окруженные телами, достаточно близкими, чтобы их можно было видеть, но достаточно удаленными, чтобы действием их можно было пренебречь. Именно это и имеем мы в случае Земли и звезд. Мы можем тогда выражать законы нашего земного мира так, как если бы звезды не существовали, и в то же время относить этот мир к системе координатных осей, вполне определенной и неизменно связанной с этими звездами. Опыт показывает, что выбор этих осей не играет никакой роли и что уравнения не изменятся, если произвести замену осей. Совокупность возможных изменений осей образует, как известно, группу шести измерений.

Откажемся теперь от нашего обычного пространства, заменим наши уравнения другими, эквивалентными им в том смысле, что будет соблюден «параллелизм» явлений. Всякий раз, когда мы будем иметь

дело с почти изолированной системой, обнаружится некоторый общий факт, именно существование определенного свойства инвариантности. Обнаружится определенная группа преобразований, которые не изменяют уравнений; эти преобразования уже не будут означать изменения осей координат, их смысл может быть любым, но группа, образованная этими преобразованиями, должна оставаться всегда изоморфной группе шести измерений, о которой мы говорили выше, ибо в противном случае не было бы параллелизма.

Так как эта группа играет во всех случаях важную роль, так как она изоморфна группе преобразования координат в обычном пространстве, так как она вследствие этого тесно связана с нашим трехмерным пространством, то в силу всего этого наши уравнения получают наипростейшую форму, когда эту группу выдвинут самым естественным образом, т. е. введя пространство трех измерений.

И так как эта группа сама изоморфна группе перемещений каждого из наших членов, рассматриваемых как твердое тело, так как свойство твердых тел двигаться, подчиняясь законам группы, есть в конечном счете лишь частный случай свойства инвариантности, на котором я остановил свое внимание, то, как мы видим, нет существенного различия между физическим основанием, побуждающим нас приписывать пространству три измерения, и психологическими основаниями, развитыми в первых параграфах этой главы.

6. Analysis situs и интуиция

Я хотел бы добавить еще одно замечание, которое лишь косвенным образом связано со всем предыдущим. Мы видели выше, сколь велико значение Analysis situs, и я объяснил, что именно он представляет настоящую область геометрической интуиции. Но существует ли эта интуиция? Я напомним, что были сделаны попытки обойтись без нее и что Гильберт пытался основать геометрию, которую назвали рациональной, так как она свободна от всякого обращения к интуиции. Она основана на определенном числе аксиом или постулатов, которые рассматриваются не