

дело с почти изолированной системой, обнаружится некоторый общий факт, именно существование определенного свойства инвариантности. Обнаружится определенная группа преобразований, которые не изменяют уравнений; эти преобразования уже не будут означать изменения осей координат, их смысл может быть любым, но группа, образованная этими преобразованиями, должна оставаться всегда изоморфной группе шести измерений, о которой мы говорили выше, ибо в противном случае не было бы параллелизма.

Так как эта группа играет во всех случаях важную роль, так как она изоморфна группе преобразования координат в обычном пространстве, так как она вследствие этого тесно связана с нашим трехмерным пространством, то в силу всего этого наши уравнения получают наипростейшую форму, когда эту группу выдвинут самым естественным образом, т. е. введя пространство трех измерений.

И так как эта группа сама изоморфна группе перемещений каждого из наших членов, рассматриваемых как твердое тело, так как свойство твердых тел двигаться, подчиняясь законам группы, есть в конечном счете лишь частный случай свойства инвариантности, на котором я остановил свое внимание, то, как мы видим, нет существенного различия между физическим основанием, побуждающим нас приписывать пространству три измерения, и психологическими основаниями, развитыми в первых параграфах этой главы.

6. Analysis situs и интуиция

Я хотел бы добавить еще одно замечание, которое лишь косвенным образом связано со всем предыдущим. Мы видели выше, сколь велико значение Analysis situs, и я объяснил, что именно он представляет настоящую область геометрической интуиции. Но существует ли эта интуиция? Я напомним, что были сделаны попытки обойтись без нее и что Гильберт пытался основать геометрию, которую назвали рациональной, так как она свободна от всякого обращения к интуиции. Она основана на определенном числе аксиом или постулатов, которые рассматриваются не

как интуитивные истины, но как неявные определения. Эти аксиомы разбиты на пять групп. Относительно четырех из этих групп я имел уже случай сказать, в какой мере законно принимать их лишь за неявные определения.

Я хотел бы остановиться здесь на одной из этих групп, на второй группе «аксиом порядка». Чтобы было понятно, в чем здесь дело, я приведу одну из этих аксиом. Если на какой-нибудь линии точка C находится между A и B , а точка D — между A и C , то точка D будет находиться между A и B . Для Гильберта это вовсе не интуитивная истина. Мы условно соглашаемся говорить, что в известных случаях C находится между A и B , но мы не знаем, что это значит, точно так же, как мы не знаем, что такое точка или линия. На основе нашего соглашения мы сможем употреблять это слово «между», чтобы выразить некоторое отношение между тремя точками, лишь бы только это отношение удовлетворяло аксиомам порядка. Таким образом, эти аксиомы являются для нас как бы определением слова «между».

В таком случае можно пользоваться этими аксиомами, доказав предварительно, что они не противоречат друг другу, и можно будет, основываясь на них, построить геометрию, в которой не будет необходимости в фигурах и которую сможет понять человек, не имеющий ни зрения, ни осязания, ни мускульных ощущений и представляющий лишь один чистый интеллект.

Да, человек этот, может быть, понял бы ее в том смысле, что увидел бы, как положения этой геометрии логически вытекают одно из другого, но совокупность этих положений показалась бы ему искусственной и странной, и он не понял бы, почему предпочли именно ее множеству других возможных совокупностей.

Если мы не испытываем такого же удивления, то это потому, что аксиомы эти не являются для нас в действительности простыми определениями или произвольными соглашениями, но соглашениями рациональными, целесообразными. Что касается аксиом других групп, то я считаю их целесообразными в том смысле, что именно они лучше всего согласуются с некоторыми привычными нам опытными

фактами, а поэтому они и оказываются для нас наиболее удобными. Что же касается аксиом порядка, то мне кажется, что в них скрывается нечто большее, что это настоящие интуитивные истины, относящиеся к *Analysis situs*. Тот факт, что точка *C* расположена между двумя другими точками какой-нибудь линии, связан с фактом рассечения непрерывности одного измерения с помощью сечений, образованных из запрещенных точек.

Но тогда возникает вопрос: истины типа аксиом порядка даны нам интуицией, но идет ли здесь речь об интуиции пространства или же об интуиции математической или физической непрерывности вообще? В пользу первого решения говорит то, что мы легко рассуждаем о пространстве и с гораздо большим трудом рассуждаем о более сложных непрерывностях, непрерывностях более чем трех измерений, которые нельзя представить в пространстве. Если бы это первое решение было принято, то все наши рассуждения оказались бы излишними. Мы бы приписывали пространству три измерения просто потому, что непрерывность трех измерений была бы единственной ясной интуицией, которую бы мы имели.

Но ведь существует *Analysis situs* более чем трех измерений. Я не скажу, что это — легкая наука. Я посвятил ей достаточно много усилий, чтобы убедиться во встречающихся здесь трудностях. Но во всяком случае эта наука возможна, и она не опирается исключительно на анализ; ею невозможно успешно заниматься без постоянных обращений к интуиции. Следовательно, существует интуиция непрерывностей более чем трех измерений, и если она требует более напряженного внимания, чем обыкновенная геометрическая интуиция, то это, без сомнения, дело привычки и результат быстро возрастающего усложнения свойств непрерывностей по мере увеличения числа измерений. Разве мы не встречаем в школах учеников, которые сильны в планиметрии и «не видят в пространстве»? Это не значит, что им не хватает интуиции трехмерного пространства, это значит лишь, что они не привыкли ею пользоваться и что для этого им необходимо некоторое усилие. Кроме того, разве не случается со всеми нами, что, желая представить себе какую-нибудь фигуру в пространстве,

мы представляем себе различные проекции этой фигуры?

В заключение я скажу, что все мы обладаем интуицией непрерывности любого числа измерений, ибо мы имеем способность построить физическую и математическую непрерывности, что эта способность существует в нас до всякого опыта, потому что без нее опыт в собственном смысле слова был бы невозможен и сводился бы к непосредственным ощущениям, не поддающимся никакой организации, что эта интуиция есть лишь сознание того, что мы обладаем такой способностью. Однако способность эта могла бы развиваться в различных направлениях; она могла бы позволить нам построить пространство четырех измерений точно таким же образом, как и пространство трех измерений. Только внешний мир, только опыт побуждают нас развивать эту способность именно в одном, а не в другом направлении.

Глава IV

ЛОГИКА БЕСКОНЕЧНОСТИ

1. Чем должна быть классификация

Могут ли обычные правила логики применяться без изменения в тех случаях, когда рассматриваются совокупности, содержащие бесконечное число предметов? Раньше этот вопрос не возникал, но им пришлось заняться, когда математики, сделавшие своей специальностью изучение бесконечности, неожиданно натолкнулись на некоторые противоречия, быть может, и кажущиеся. Происходят ли эти противоречия от того, что были неверно применены правила логики, или же от того, что эти правила перестают быть правомерными вне их собственной области, т. е. области совокупностей, составленных только из конечного числа объектов? Мне кажется, что будет не лишним сказать здесь по этому поводу несколько слов и дать читателю понятие о тех спорах, к которым привел этот вопрос.

Формальная логика есть не что иное, как учение о свойствах, общих для всякой классификации. Она