мы представляем себе различные проекции этой фигуры?

В заключение я скажу, что все мы обладаем интуицией непрерывности любого числа измерений, ибо мы имеем способность построить физическую и математическую непрерывности, что эта способность существует в нас до всякого опыта, потому что без нее опыт в собственном смысле слова был бы невозможен и сводился бы к непосредственным ощущениям, не поддающимся никакой организации, что эта интуиция есть лишь сознание того, что мы обладаем такой способностью. Однако способность эта могла бы развиваться в различных направлениях; она могла бы позволить нам построить пространство четырех измерений точно таким же образом, как и пространство трех измерений. Только внешний мир, только опыт побуждают нас развивать эту способность именно в одном, а не в другом направлении.

Глава IV

ЛОГИКА БЕСКОНЕЧНОСТИ

1. Чем должна быть классификация

Могут ли обычные правила логики применяться без изменения в тех случаях, когда рассматриваются совокупности, содержащие бесконечное число предметов? Раньше этот вопрос не возникал, но им пришлось заняться, когда математики, сделавшие своей специальностью изучение бесконечности, неожиданно натолкнулись на некоторые противоречия, быть может, и кажущиеся. Происходят ли эти противоречия от того, что были неверно применены правила логики, или же от того, что эти правила перестают быть правомерными вне их собственной области, т. е. области совокупностей, составленных только из конечного числа объектов? Мне кажется, что будет не лишним сказать здесь по этому поводу несколько слов и дать читателю понятие о тех спорах, к которым привел этот вопрос.

Формальная логика есть не что иное, как учение о свойствах, общих для всякой классификации. Она учит нас, что два солдата, числящихся в одном полку, тем самым принадлежат к одной и той же бригаде, а следовательно, и к одной и той же дивизии; к этому-то и сводится вся теория силлогизмов. Каково же условие, при котором правила этой логики имеют силу? Для этого необходимо, чтобы принятая классификация была неизменной. Мы знаем, что два солдата служат в одном полку, и отсюда заключаем, что они принадлежат к одной и той же бригаде. Мы имеем на это право, так как полагаем, что за то время, пока мы рассуждаем, ни один солдат не был переведен из одного полка в другой.

Отмеченные выше недоразумения произошли из-за того, что забыли это простое условие и опирались на классификацию, которая не могла быть таковой. Ее постарались объявить неизменной, но этого недостаточно; необходимо было сделать ее действительно неизменной, а существуют случаи, когда это невозможно.

Позвольте мне заимствовать пример у Рассела. Кстати, он использовал его против меня. Он хотел показать, что трудности возникают не от введения актуальной бесконечности, так как они могут появиться даже при рассмотрении только конечных чисел. Я впоследствии вернусь к этому пункту, в данный момент речь идет не об этом, и я выбрал этот пример, поскольку он интересен и хорошо поясняет отмеченный мною факт.

Каково наименьшее целое число, которое не может быть определено фразой, состоящей менее чем из ста французских слов? И существует ли такое число?

Да, так как с помощью ста французских слов можно построить только конечное число фраз, а число слов в словаре французского языка конечно. Среди этих фраз будут и такие, которые не имеют никакого смысла и не определяют никакого целого числа Но каждая из них может определить не больше одного целого числа. Количество целых чисел, которые могут быть таким образом определены, очевидно, конечно; следовательно, наверняка найдутся целые числа, которые не могут быть определены, и среди этих чисел найдется одно, которое будет меньше всех остальных.

Нет, так как если бы это целое число существовало, то его существование являлось бы противоречием, поскольку оно определялось бы фразой, состоящей менее чем из ста французских слов, т. е. той самой фразой, которая утверждает, что этого не может быть [1]).

Это рассуждение основано на классификации целых чисел на две категории: таких, которые могут быть определены фразой, состоящей менее чем из ста французских слов, и таких, которые не могут быть ею определены. Ставя вопрос, мы неявно объявляем эту классификацию неизменной, и должны рассуждать уже после того, как окончательно это установили. Но это невозможно. Классификация не может быть окончательной ранее того, как мы пересмотрим все фразы менее чем из ста слов, отбросим те из них, которые лишены смысла, и установим смысл тех, которые его имеют. Но среди этих фраз есть и такие, которые не могут иметь смысла до того, как классификация будет установлена; такими являются те фразы, в которых речь идет о самой классификации. Итак, классификация чисел может быть установлена только после окончания разбора фраз, а этот разбор может быть закончен только после установления классификации. Таким образом, ни классификация, ни выбор фраз не могут быть никогда прекращены. Эти затруднения начинают встречаться особенно часто, как только дело касается бесконечных совокупностей. Положим, хотят классифицировать элементы подобной совокупности, и положим, что принцип этой классификации основывается на некоторой зависимости между классифицируемыми элементами и всем их собранием в целом. Может ли подобная классификация считаться когда-либо оконченной? Актуальной бесконечности нет, и когда мы говорим о бесконечной совокупности, этим мы хотим сказать, что она обладает тем свойством, что к ней без конца можно прибавлять новые элементы (подобно подписному листу, который никогда не будет закрыт в ожидании новых подписчиков). Но классифицирование никогда не может быть прекращено окончательно до тех пор, пока

---

[1]) Имеется в виду фраза, с помощью которой сформулирован сам вопрос. — *Примеч. ред.*

этот лист не будет закрыт. Всякий раз, как к этой совокупности прибавляют новые элементы, совокупность меняется; может измениться зависимость между этой совокупностью и уже классифицированными элементами, а так как по этой зависимости элементы распределялись в тот или иной ящик, то может случиться, что при изменении этой зависимости элементы уже не окажутся правильно распределенными, и их придется переместить из одних ящиков в другие. Пока могут быть еще введены новые элементы, следует опасаться того, что всю работу придется выполнять заново, а мы никогда не придем к такому моменту, когда больше не будет новых элементов, которые нужно вводить в совокупность; следовательно, классификация никогда не будет окончена.

Отсюда вытекает различие между двумя видами классификаций, применимых к элементам бесконечных совокупностей: классификациями предикативными, которые не нарушаются введением новых элементов, и классификациями непредикативными, которые без конца изменяются под влиянием введения новых элементов.

Предположим, например, что распределяют целые числа на два семейства в зависимости от их величин. Можно убедиться в том, больше или меньше какое-то число чем 10, не рассматривая зависимостей этого числа от совокупности других целых чисел. Когда, предположим, определили 100 первых чисел, то будет известно, какие из них больше и какие меньше чем 10. Если затем введем 101 число или какое-либо из следующих чисел, то те из 100 предыдущих, которые были меньше 10, так и останутся меньшими 10; те, которые были больше, останутся бóльшими; это — классификация предикативная.

Наоборот, положим, что хотят классифицировать точки пространства и отделяют те из них, которые могут быть определены конечным числом слов, от тех, которые не могут быть так определены. Среди возможных фраз будут такие, которые содержат указания на всю совокупность, т. е. на пространство или на его части. Когда мы введем новые точки в пространство, эти фразы изменят смысл и не будут уже определять ту же самую точку, или же вовсе потеряют всякий смысл, а то еще и приобретут такой смысл, которого они раньше не имели. В таком случае точки, которые не поддавались определению, окажутся доступными для определения, а другие, которые были определены, перестанут быть таковыми. Они должны будут переместиться из одной категории в другую. Классификация не будет предикативной.

Существуют хорошие мыслители, которые считают, что единственными объектами, о которых можно рассуждать, являются такие объекты, которые могут быть определены конечным числом слов; с моей стороны тем более невежливо не считать их хорошими мыслителями, что скоро я сам буду отстаивать их взгляды. Можно считать, что предыдущий пример плохо выбран, но его легко изменить.

Чтобы классифицировать целые числа или точки пространства, я рассмотрю фразу, определяющую каждое целое число или каждую точку. Так как может случиться, что одно и то же число или одна и та же точка будут определены несколькими фразами, то я расположу эти фразы в алфавитном порядке и выберу из них первую. Далее, эта фраза может оканчиваться гласной или согласной, и этим критерием можно воспользоваться для классификации. Но эта классификация не будет предикативной; при введении новых целых чисел или новых точек фразы, не имевшие никакого смысла, приобретут его. Тогда в таблицу фраз, определяющих целое число или точку, необходимо будет вписать новые фразы, которые до сих пор были лишены смысла, но теперь получили его и определяют именно эту точку. Может случиться, что такая фраза окажется во главе алфавитного списка и будет оканчиваться гласной, тогда как старая фраза кончалась согласной. А тогда наше целое число или наша точка, которая только что находилась в одной категории, должна будет перейти в другую.

Если же, наоборот, мы распределим точки пространства по величине их координат, если мы условимся собрать вместе те из них, абсцисса которых меньше 10, то введение новых точек ничем не изменит классификацию; уже введенные точки, соответствовавшие этому условию, не перестанут ему соответствовать после введения новых. Классификация будет предикативной.

То, что мы говорили о классификациях, непосредственно применяется и к определениям. Всякое определение в действительности является классификацией. Оно отделяет предметы, удовлетворяющие определению, от тех, которые ему не удовлетворяют, и разбивает их на два различных класса. Если оно действует, как говорили схоластики, per proximum genus et differentiam specificam[1]), то, очевидно, оно основано на делении рода на виды. Определение, как и всякая классификация, следовательно, может быть или не быть предикативным.

Но здесь возникает затруднение. Вернемся к предыдущему примеру. Целые числа принадлежат к классу A или к классу B в зависимости от того, больше они или меньше чем 10,5. Я определил некоторые целые числа α, β, γ, ... и распределил их между двумя классами A и B. Я определяю и ввожу новые целые числа. Я сказал, что распределение не изменится и, следовательно, что классификация будет предикативной. Но чтобы положение числа α в классификации не изменялось, недостаточно неизменности порядка классификации; необходимо еще, чтобы число α осталось тем же, т. е. чтобы его определение было предикативным. Поэтому не следует говорить, что классификация является абсолютно предикативной относительно некоторого способа определения.

2. Кардинальное число

Не следует забывать предыдущих рассуждений при определении кардинального числа. Если мы рассматриваем две совокупности, то можем попытаться найти такой закон соответствия, что всякому объекту первой совокупности будет соответствовать объект второй совокупности и притом только один, и наоборот. Если это возможно, то говорят, что обе совокупности имеют одинаковое кардинальное число.

Но здесь предполагается также, что этот закон соответствия предикативный. Если имеют дело с двумя бесконечными совокупностями, то никогда нельзя будет считать эти две совокупности исчерпанными.

---

[1]) Через ближайший род и видовое отличие (*лат.*). — *Примеч. ред.*