То, что мы говорили о классификациях, непосредственно применяется и к определениям. Всякое определение в действительности является классификацией. Оно отделяет предметы, удовлетворяющие определению, от тех, которые ему не удовлетворяют, и разбивает их на два различных класса. Если оно действует, как говорили схоластики, per proximum genus et differentiam specificam[1]), то, очевидно, оно основано на делении рода на виды. Определение, как и всякая классификация, следовательно, может быть или не быть предикативным.

Но здесь возникает затруднение. Вернемся к предыдущему примеру. Целые числа принадлежат к классу A или к классу B в зависимости от того, больше они или меньше чем 10,5. Я определил некоторые целые числа α, β, γ, ... и распределил их между двумя классами A и B. Я определяю и ввожу новые целые числа. Я сказал, что распределение не изменится и, следовательно, что классификация будет предикативной. Но чтобы положение числа α в классификации не изменялось, недостаточно неизменности порядка классификации; необходимо еще, чтобы число α осталось тем же, т. е. чтобы его определение было предикативным. Поэтому не следует говорить, что классификация является абсолютно предикативной относительно некоторого способа определения.

2. Кардинальное число

Не следует забывать предыдущих рассуждений при определении кардинального числа. Если мы рассматриваем две совокупности, то можем попытаться найти такой закон соответствия, что всякому объекту первой совокупности будет соответствовать объект второй совокупности и притом только один, и наоборот. Если это возможно, то говорят, что обе совокупности имеют одинаковое кардинальное число.

Но здесь предполагается также, что этот закон соответствия предикативный. Если имеют дело с двумя бесконечными совокупностями, то никогда нельзя будет считать эти две совокупности исчерпанными.

---

[1]) Через ближайший род и видовое отличие (*лат.*). — *Примеч. ред.*

Предположим, что мы взяли в первой совокупности определенное число объектов; закон соответствия позволит нам определить соответствующие объекты второй. Если мы затем введем новые объекты, то может случиться, что введение изменит смысл закона соответствия таким образом, что объект A' второй совокупности, который до этого введения соответствовал объекту A первой совокупности, не будет больше ему соответствовать. В этом случае закон соответствия не будет предикативным.

Мы поясним это на двух примерах противоположного смысла. Я рассматриваю совокупность целых чисел и совокупность четных чисел. Каждому целому n я могу привести в соответствие четное число $2n$. Когда я ввожу новые целые числа, всегда $2n$ будет соответствовать n. Закон соответствия предикативный, и так обстоит дело во всех случаях, которые представляет Кантор, когда, например, доказывает, что кардинальное число рациональных чисел равно кардинальному числу целых чисел или кардинальное число точек в пространстве равно кардинальному числу точек прямой.

Предположим, наоборот, что сравнивают совокупность целых чисел с совокупностью точек пространства, которые могут быть определены конечным числом слов, и предположим, что я устанавливаю между ними следующее соответствие: я составляю таблицу всех возможных фраз, располагаю их по числу, помещая в алфавитном порядке те, которые имеют одинаковое число слов. Затем зачеркиваю в ней те фразы, которые не имеют никакого смысла, которые не определяют никакой точки, и те, которые определяют точку, уже определенную одной из предыдущих фраз. Каждой точке я привожу в соответствие ту фразу, которая ее определяет, и номер, под которым находится эта фраза в образованной таким образом таблице.

Когда я введу новые точки, то может случиться, что фразы, которые раньше были лишены смысла, приобретут его; их придется тогда восстановить в таблице, из которой их вычеркнули; и номера всех остальных фраз окажутся измененными. Наши соответствия окажутся совершенно измененными; наш закон соответствия не является предикативным.

Если не обращать внимания на это условие при сравнении кардинальных чисел, то можно прийти к замечательным парадоксам. Следовательно, необходимо изменить определение кардинальных чисел замечанием, что закон соответствия, на котором основано это определение, должен быть предикативным.

Всякий закон соответствия основывается на двойной классификации. Необходимо классифицировать объекты двух совокупностей, которые собираются сравнивать, и обе классификации должны быть параллельными. Если, например, объекты первой совокупности распределяются по классам, которые в свою очередь подразделяются на разряды, а эти — на семейства и т. д., то то же самое должно быть сделано и с объектами второй совокупности. Каждому классу первой классификации должен соответствовать класс второй классификации и притом только один, каждому разряду — разряд и т. д. до тех пор, пока не придем к отдельным индивидуумам. И тогда будет видно, каково должно быть условие, чтобы закон соответствия был предикативным. Необходимо, чтобы две классификации, на которых основан этот закон, сами были предикативными.

3. Мемуар Рассела

Рассел опубликовал в American Journal of Mathematics, том XXX, под названием «Математическая логика, основанная на теории типов» мемуар, где он основывается на рассуждениях, вполне аналогичных предыдущим. Вспомнив несколько парадоксов, наиболее знаменитых у логиков, он ищет их происхождение и находит его вполне справедливо в некотором порочном кругу. Пришли к несуразностям потому, что рассматривали совокупности, содержащие объекты, в определение которых входит понятие самой совокупности. Пользовались непредикативным определением, смешали, говорит Рассел, слова all и any, что мы можем выразить по-французски словами tous (все) и quelconque (любой).

Таким образом, он приходит к необходимости рассмотреть то, что он называет иерархией типов. Допустим, что некоторое положение справедливо для некоторого индивида определенного класса. Под