типов разницу между конечными и бесконечными числами, поскольку теория эта лишена смысла, если предположить, что это различие уже сделано.

4. Вообще, ответят ли на первый вопрос «да» или «нет», теория типов останется непонятной, если не предположить уже построенной теорию порядковых чисел. Каким же образом основать теорию порядковых чисел на теории типов?

4. Аксиома сводимости

Рассел вводит новую аксиому, которую называет axiom of reducibility (аксиома сводимости). Я предоставляю слово автору, так как не уверен в том, что правильно понял его мысль. «We assume, that every function is equivalent, for all its value to some predicative function of the same argument.»[1]). Но чтобы понять это утверждение, необходимо вернуться к определениям, данным в начале мемуара. Что такое функция и что такое предикативная функция? Если предложение присвоено данному объекту a, то это частное предложение; если его присваивают некоторому неопределенному предмету x, то это пропозициональная функция x. Предложение будет определенного порядка в иерархии типов, и этот порядок не будет одним и тем же, каково бы ни было x, так как он будет зависеть от порядка x. Функция будет называться предикативной, если она порядка $k+1$, когда x порядка k.

После этих определений смысл аксиомы все еще не очень ясен, и несколько примеров не помешают. Рассел их не дал, и я колеблюсь давать их по собственному усмотрению, так как боюсь исказить его мысль, которую я возможно не совсем точно уловил. Но даже и не уловив ее, в одном не сомневаюсь, а именно в том, что речь идет о новой аксиоме. С помощью этой аксиомы надеются доказать принцип математической индукции; что это возможно, я менее всего хотел бы отрицать, поскольку подозреваю, что эта аксиома является лишь другой формой указанного принципа.

---

[1]) Мы предполагаем, что всякая функция эквивалентна для всех ее значений некоторой предикативной функции того же аргумента (*англ.*). — *Примеч. ред.*

В этом случае я не могу удержаться от того, чтобы не вспомнить всех тех, кто пытается доказать постулат Евклида, опираясь на одно из его следствий и считая это следствие очевидной истиной. Что они выиграли? Как бы ни была ясна эта истина, будет ли она более очевидной, чем сам постулат?

Итак, мы ничего не выигрываем в числе постулатов; выигрываем ли мы по крайней мере в их качестве? И что нового дает аксиома по отношению к принципу индукции?

1. Доступен ли он для более ясной и простой формулировки? Возможно, так как то, что дает Рассел, наверное, может быть усовершенствовано; но это мало вероятно.

2. Является ли аксиома сводимости более общей, чем принцип индукции, в том отношении, что ее нельзя доказать, исходя из этого принципа?

3. Или же, наоборот, аксиома является, по-видимому, менее общей, чем принцип, так что не сразу замечают, что последний содержится в ней, хотя в действительности дело обстоит так?

4. Применение этой аксиомы может быть более соответствует естественным склонностям нашего ума; можно ли его [1]) оправдать психологически?

Я ограничиваюсь постановкой этих вопросов; мне недостает основ для их разрешения, так как я не мог даже достичь полного понимания смысла этой аксиомы. Но хотя я не могу, основываясь на чересчур общих указаниях Рассела, рассчитывать полностью постичь этот смысл, я позволю себе по крайней мере сделать несколько предположений. Вот, например, предложение — определение целого числа: конечное целое есть число, принадлежащее всем рекуррентным классам. Это предложение само по себе не имеет смысла; оно будет его иметь, как только определят порядок рекуррентных классов, о которых идет речь. Но, к счастью, получается следующее: всякое целое 2-го порядка a fortiori (тем более) является целым 1-го порядка, так как оно будет принадлежать ко всем рекуррентным классам двух первых порядков и, следовательно, ко всем рекуррентным классам 1-го

[1]) Имеется в виду принцип математической индукции. — *Примеч. ред.*

порядка; точно так же всякое целое k-го порядка будет a fortiori целым $k-1$-го порядка. Таким образом, мы приходим к определению ряда все более и более ограниченных классов целых 1-го, 2-го, ... n-го порядов, каждый из которых содержится в предыдущем. Я назову целым порядка ω всякое число, принадлежащее сразу всем этим классам; и это определение целого порядка ω будет иметь смысл и может быть рассматриваемо как равнозначное первоначально предложенному определению целого числа, не имевшему смысла. Не в этом ли заключается правильное применение аксиомы сводимости, как ее понимает Рассел? Я предлагаю этот пример очень неуверенно.

Примем его пока что и вернемся к теореме относительно суммы целых. Мы выяснили, что сумма двух целых k-го порядка есть целое $k-1$-го порядка, и мы хотим вывести из этого, что если x и n — два целых порядка ω, то сумма $n+x$ — также целое порядка ω. Фактически для этого достаточно доказать, что оно будет целым порядка k, как бы велико ни было это k. Но если n и x — целые порядка ω, они a fortiori (тем более) будут целыми порядка $k+1$; итак, вследствие уже доказанной теоремы $n+x$ будет целым порядка k, что и требовалось доказать.

Не таким ли образом можно пользоваться аксиомой Рассела? Я чувствую, что это не совсем то и что Рассел придал бы рассуждению совершенно иную форму, но суть осталась бы прежней. Я не хочу разбирать здесь законность этого способа доказательства; ограничусь пока следующими замечаниями. Мы ввели, кроме понятия объектов порядка n, объекты порядка ω и думается, что нам удалось определить это новое понятие в отношении целых чисел. Но это удается не всегда; например, это вовсе не получится для примера Эпименида. Успех обеспечивало следующее обстоятельство. Изученная классификация не была предикативной, и прибавление новых элементов заставляло изменять классификацию элементов, уже введенных и классифицированных. Однако это изменение могло происходить только в одном направлении: могло оказаться необходимым переносить объекты из класса A в класс B (именно из класса целых в класс нецелых), но никогда из класса B в класс A. Для определения порядка ω необходимо новое соглашение в тех случаях, когда изменение должно происходить как в одном направлении, так и в другом. Далее, определение целых порядка ω не то же самое, что и определение целых порядка k, где k конечное. Целые порядка k определяют посредством рекуррентности, выводя понятие целого порядка k из понятия целого порядка $k - 1$. Целые порядка ω определяют переходом к пределу, вводя зависимость этого нового понятия от бесконечного числа предыдущих понятий целых всех конечных порядков. Два определения могли бы быть непонятными для того, кто не знает еще, что такое конечное число; эти определения предполагают различие между конечными и бесконечными числами. Следовательно, нельзя надеяться основать на них это различие.

5. Мемуар Цермело

Совершенно в другом направлении ищет Цермело разрешения тех затруднений, которые мы отметили. Он пытается установить систему аксиом a priori, которые позволили бы ему выяснить все истины математики без противоречий. Можно по-разному понимать роль аксиом; их можно рассматривать как произвольные предписания, которые являются не чем иным, как скрытыми определениями основных положений. Таким способом Гильберт в своей геометрии вводит вначале «предметы», которые он называет точками, прямыми, плоскостями, и, забывая или делая вид, что забывает на один момент житейский смысл этих слов, он устанавливает между этими предметами различные зависимости, которые их определяют. Чтобы это было законно, необходимо доказать, что аксиомы, введенные таким образом, не противоречат друг другу, и Гильберт вполне преуспел в том, что касается геометрии, так как он предполагал анализ уже созданным и мог пользоваться им в этом доказательстве. Цермело не доказал, что его аксиомы свободны от противоречий, и не мог этого сделать, так как для этого ему было бы необходимо опираться на другие истины, уже установленные. Но при наличии уже установленных истин, при уже образованной