класса B в класс A. Для определения порядка ω необходимо новое соглашение в тех случаях, когда изменение должно происходить как в одном направлении, так и в другом. Далее, определение целых порядка ω не то же самое, что и определение целых порядка k, где k конечное. Целые порядка k определяют посредством рекуррентности, выводя понятие целого порядка k из понятия целого порядка $k-1$. Целые порядка ω определяют переходом к пределу, вводя зависимость этого нового понятия от бесконечного числа предыдущих понятий целых всех конечных порядков. Два определения могли бы быть непонятными для того, кто не знает еще, что такое конечное число; эти определения предполагают различие между конечными и бесконечными числами. Следовательно, нельзя надеяться основать на них это различие.

5. Мемуар Цермело

Совершенно в другом направлении ищет Цермело разрешения тех затруднений, которые мы отметили. Он пытается установить систему аксиом a priori, которые позволили бы ему выяснить все истины математики без противоречий. Можно по-разному понимать роль аксиом; их можно рассматривать как произвольные предписания, которые являются не чем иным, как скрытыми определениями основных положений. Таким способом Гильберт в своей геометрии вводит вначале «предметы», которые он называет точками, прямыми, плоскостями, и, забывая или делая вид, что забывает на один момент житейский смысл этих слов, он устанавливает между этими предметами различные зависимости, которые их определяют. Чтобы это было законно, необходимо доказать, что аксиомы, введенные таким образом, не противоречат друг другу, и Гильберт вполне преуспел в том, что касается геометрии, так как он предполагал анализ уже созданным и мог пользоваться им в этом доказательстве. Цермело не доказал, что его аксиомы свободны от противоречий, и не мог этого сделать, так как для этого ему было бы необходимо опираться на другие истины, уже установленные. Но при наличии уже установленных истин, при уже образованной науке он предполагает, что их еще нет; он начинает с чистой доски и хочет, чтобы его аксиомы полностью удовлетворялись друг другом.

Но нельзя произвольно снабжать смыслом постулаты; необходимо, чтобы они были очевидны сами по себе. Поэтому нам не нужно доказывать эту очевидность, так как она недоказуема, но нужно стараться проникнуть в тот психологический механизм, который вызвал это ощущение очевидности. Здесь-то и возникает затруднение: Цермело принимает ряд аксиом и отбрасывает другие, которые на первый взгляд могут казаться столь же очевидными, как и те, которые он сохраняет. Если бы он сохранил их все, то он впал бы в противоречия, следовательно, ему необходимо было сделать выбор; но можно спросить, каковы основания его выбора, и это-то требует некоторого внимания.

Он начинает с того, что отбрасывает определение Кантора: множество есть собрание каких-либо различных объектов, образующих нечто целое. Я, конечно, не имею права говорить о множестве всех объектов, удовлетворяющих тем или иным условиям. Эти объекты не образуют множества, Menge, но вместо отбрасываемого определения необходимо принять какое-нибудь другое. Цермело ограничивается словами: рассмотрим область (Bereich) каких-либо объектов; может случиться, что между двумя из этих объектов x и y существует зависимость вида $x \in y$; мы скажем в таком случае, что x есть элемент y и что y есть множество, Menge.

Очевидно, что это не является определением; кто-либо, не знающий, что такое Menge, не узнает ничего, если ему скажут, что оно изображается символом $\in$, так как он не знает, что такое $\in$. Это могло бы еще сойти, если бы этот символ $\in$ в будущем определялся самими аксиомами, рассматриваемыми как произвольные предписания. Но мы только что видели, что эта точка зрения недопустима. Необходимо, чтобы мы знали заранее, что такое Menge, чтобы имели его интуицию, и именно эта интуиция позволит нам понять, что такое $\in$, которое без этого будет только лишенным смысла символом, относительно которого нельзя будет утверждать никаких очевидных самих по себе свойств. Но чем же может быть эта интуиция, как не тем определением Кантора, которое мы презрительно отбросили? Оставим это затруднение, которое мы попытаемся осветить несколько дальше, и перечислим аксиомы, принятые Цермело; их семь:

1. Два Menge, имеющие одни и те же элементы, тождественны.

2. Существует одно Menge, не содержащее ни одного элемента,— это Nullmenge; если существует один объект a, то существует Menge (a), единственным элементом которого является этот объект; если существуют два объекта a и b, то существует Menge (a, b), единственными элементами которого являются эти объекты.

3. Множество всех элементов какого-либо Menge M, удовлетворяющих условию x, образуют подмножество Untermenge M.

4. Каждому Menge T соответствует другое Menge UT, образованное из всех Untermengen T.

5. Рассмотрим Menge T, все элементы которого сами являются Mengen; существует Menge ST, элементы которого являются элементами элементов T. Если, например, T имеет три элемента A, B, C, которые сами являются Mengen, и если A имеет два элемента a и a', B — два элемента b и b', C — два элемента c и c', то ST будет иметь шесть элементов a, b, c, a', b', c'.

6. Если имеется Menge T, все элементы которого сами является Mengen, то можно выбрать в каждом из этих элементарных Mengen по элементу, и множество выбранных таким образом элементов образует Untermenge ST.

7. Существует по крайней мере одно бесконечное Menge.

Прежде чем разбирать эти аксиомы, я должен ответить на один вопрос: почему в их формулировке я сохранил немецкое слово Menge вместо того, чтобы перевести его по-французски словом ensemble (множество)? Потому что я не уверен в том, что слово Menge сохраняет свой интуитивный смысл, без которого было бы затруднительно отбросить определение Кантора; французское же слово ensemble внушает этот интуитивный смысл чересчур навязчиво, чтобы его можно было употреблять без помехи и в том случае, когда смысл изменился.

На седьмой аксиоме я остановлюсь лишь немного; при этом я должен сказать несколько слов, чтобы отметить весьма оригинальный способ, которым Цермело ее высказывает. Он в действительности не удовлетворился данной мною формулировкой и говорит: существует Menge M, которое не может содержать элемента a, не включая в себя в то же время в качестве элемента Menge (a), т. е. такое, единственным элементом которго является a. И тогда, если M содержит элемент a, то оно будет содержать еще и ряд других элементов, а именно: Menge, единственным элементом которого является a, Menge, единственным элементом которого является Menge, единственным элементом которого является a, и т. д. Достаточно хорошо видно, что число этих элементов должно быть бесконечным. На первый взгляд, этот обходной путь кажется очень странным и очень искусственным; так оно в действительности и есть. Но Цермело хотел избежать слова «бесконечный», так как он рассматривает свои аксиомы как предшествующие отличению конечного от бесконечного.

Перейдем к шести первым аксиомам. Их можно рассматривать как очевидные, если только слову Menge будет дан его интуитивный смысл и если при этом будут рассматриваться предметы только в конечном числе. Но они являются таковыми не больше чем следующая аксиома, откровенно отброшенная автором:

8. Какие бы то ни было объекты образуют Menge.

В таком случае нам приходится задать вопрос: почему очевидность 8-й аксиомы исчезает, как только дело касается бесконечных совокупностей, в то время как очевидность шести первых имеет место?

Если для решения этого вопроса мы обратимся к формулировке аксиом, то прежде всего мы убедимся, что все эти аксиомы без исключения не дают нам ничего иного, кроме одного: определенные совокупности, образованные по определенным законам, составляют Mengen; таким образом, эти аксиомы окажутся для нас не чем иным, как правилами, предназначенными для расширения смысла слова Menge, чистыми определениями слова. И это одинаково верно как для 8-й аксиомы, которую мы отбрасываем, так и для первых семи аксиом, которые мы принимаем.

Мы одинаково быстро убеждаемся, что это первое впечатление ошибочно; подобные определения слова не поставят нас перед противоречием, его можно опасаться только в том случае, если мы имеем другие аксиомы, утверждающие, что некоторые совокупности не являются Mengen, а мы этих аксиом не имеем. В то же время, если мы отбрасываем 8-ю аксиому, то мы это делаем для того, чтобы избежать противоречия; Цермело говорит это открыто.

Поэтому отсюда необходимо заключить, что он не рассматривал свои аксиомы как простые определения слова, а связывал со словом Menge интуитивный смысл, существовавший до формулирования аксиом, хотя и немного отличный от обычного смысла. Его нельзя не заметить, исследуя, как автор пользуется им в своих рассуждениях. Menge — это нечто, о чем можно рассуждать, это нечто в определенной мере прочное и неизменное. Определить множество, Menge, некоторую совокупность — это всегда значит произвести классификацию, отделить предметы, принадлежащие этому множеству, от тех, которые не участвуют в нем. Тогда мы скажем, что это множество не есть Menge, если соответствующая классификация не предикативная, и что оно является Menge, если эта классификация предикативная или если относительно нее можно рассуждать так, как если бы она была таковой.

Если мы обрасываем 8-ю аксиому, то потому, что какие бы то ни было объекты, конечно, образуют совокупность, но совокупность, которая никогда не будет замкнутой и порядок которой может быть в любой момент нарушен введением непредвиденных членов; это такая совокупность, которая не предикативна. И, наоборот, когда мы, например, говорим, что каждому Menge T соответствует другое Menge UT или ST, определенное неким способом, то мы утверждаем, что это определение предикативно, или что мы имеем право работать с ним, как если бы оно было таким.

Здесь уместно поговорить об одном различии, которое играет существенную роль в теории Цермело: «Eine Frage oder Aussage E, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen

Gesetze ohne Willkür unterscheiden, heisst definit»[1]). Слово «definit» — здесь в большой степени синоним слова «предикативный». Так, предположим, например, что этот вопрос *E* будет заключаться в следующем: обладает ли такой-то элемент, принадлежащий Menge *M*, такими-то зависимостями по отношению ко всем другим элементам того же Menge, и можем ли мы согласиться говорить, что все элементы, относительно которых следует сказать да, образуют класс *K*? Для меня, и я думаю, что также и для Рассела, подобный вопрос не является определенным, так как другие элементы *M* бесконечны числом, так как можно будет без конца вводить новые из них и так как среди введенных новых могут быть такие, в определение которых входит понятие класса *K*, т. е. совокупности элементов, обладающих свойством *E*. Для Цермело этот вопрос был дефинитным, и я не знаю точно, где строгое разграничение между вопросами, которые дефинитны и которые таковыми не являются. Ему кажется, что для того, чтобы узнать, обладает ли некоторый элемент свойством *E* относительно всех других элементов *M*, достаточно проверить, обладает ли он им относительно каждого из них. Если вопрос оказывается дефинитным относительно каждого из этих элементов, то он будет таковым ipso facto (тем самым) и относительно всех этих элементов.

Здесь-то и выявляется расхождение наших взглядов. Цермело запретил себе рассматривать множество всех объектов, удовлетворяющих некоторому определенному условию, так как ему кажется, что это множество никогда не бывает замкнутым, что всегда можно ввести в него новые объекты. Наоборот, он не стесняется говорить о множестве объектов, составляющих часть определенного Menge *M* и удовлетворяющих, кроме того, некоторому условию. Ему кажется, что он не может получить Menge, не получив одновременно все его элементы. Среди этих элементов он выберет те, которые удовлетворяют данному условию, и произведет этот выбор достаточно спокойно, не боясь

---

[1]) Вопрос или положение *E*, справедливость или несправедливость которого может быть без всякого произвола установлена основными соотношениями данной области на основании аксиом или общих логических законов, называется дефинитным (*нем.*). — *Примеч. ред.*

нарушить его введением новых и непредвиденных элементов, так как что касается этих элементов, то они все уже у него в руках. Образовав заранее свое Menge M, он воздвиг монастырские стены, которые останавливают непрошенных, могущих прийти извне. Но он не спросил себя, не могут ли появиться непрошенные внутренние посетители, которых он заключил вместе с собой в своих стенах. Если Menge M имеет бесконечное число элементов, это должно значить не то, что эти элементы могут рассматриваться как существующие все вместе с самого начала, а то, что без конца могут появляться новые; они появятся внутри стен вместо того, чтобы появиться вне их, вот и все. Когда я говорю о всех целых числах, я хочу говорить как о всех уже изобретенных числах, так и о тех, которые могут быть когда-нибудь изобретены; когда я говорю о всех точках пространства, то я хочу говорить о всех точках, координаты которых выражаются рациональными числами, или алгебраическими числами, или интегралами, или всеми другими способами, какие могут быть изобретены. И это-то «могут быть» и есть бесконечность. Но можно будет изобрести такие, которые будут определяться многими способами, и если мы вернемся, как раньше, к нашему вопросу E и классу K, то вопрос E возникает вновь всякий раз, как определят новый элемент M; среди этих элементов, которые мы сможем определить, найдутся такие, определение которых будет зависеть от этого класса K. Таким образом, порочный круг не может быть обойден.

Вот почему аксиомы Цермело меня не удовлетворяют. Они не только не кажутся мне очевидными, но когда меня спросят, свободны ли они от противоречий, я не буду знать, что ответить. Автор думал избежать наиболее существенного парадокса, запретив себе всякие спекуляции за пределами полностью замкнутого Menge; он думал избежать парадокса Ришара, не ставя никаких вопросов, кроме дефинитных, что по тому смыслу, который он вкладывает в это выражение, исключает всякое рассмотрение объектов, которые могут быть определены конечным числом слов. Но если он хорошо запер свою овчарню, то я не убежден в том, что он не запер туда и волка. Я не успокоюсь до тех пор, пока он не покажет, что он укрыт от противоречий; я прекрасно знаю, что он не может этого сделать, так как он должен был бы опираться, например, на принцип индукции, который он, без сомнения, не признал бы, но который он предполагал доказать далее. Он должен был бы идти дальше; это произошло бы ценой логической ошибки, но по меньшей мере мы в этом были бы уверены.

6. Употребление бесконечности

Можно ли рассуждать об объектах, которые не могут быть определены конечным числом слов? Можно ли даже говорить о них, зная, о чем говорят, и произнося нечто иное, чем пустые слова? Или же, наоборот, их следует рассматривать как непознаваемые? Что касается меня, то я не колеблюсь ответить, что они просто не существуют.

Все объекты, которые мы сможем когда-нибудь себе представить, или будут определены конечным числом слов, или же будут определены только несовершенно и останутся неотделимыми от массы других объектов; и мы не сможем исследовать их логически строго до того, как мы их отделим от этих других объектов, с которыми они связаны, т. е. до того, как мы придем к определению их конечным числом слов.

Если мы рассмотрим множество и захотим определить различные его элементы, то это определение, очевидно, разобьется на две части: первая часть определения, общая всем элементам множества, научит нас отделять их от элементов, чуждых этому множеству; это будет определение множества; вторая часть научит нас отличать одни от других различные элементы множества.

Каждая из этих двух частей должна будет складываться из конечного числа слов. Если говорят о всех элементах того множества, определение которого хотят дать, то хотят говорить о всех объектах, удовлетворяющих первой части определения, которые могут быть окончательно определены такой фразой из конечного числа слов, какая будет желательна. Вам дают только половину определения, вы можете затем ее дополнить, выбрать по своему желанию вторую половину, но необходимо, чтобы вы ее дополнили. Когда я утверждаю некоторое положение, касающееся всех объектов множества, я хочу этим сказать, что если один объект удовлетворяет первой части опреде-