так как он должен был бы опираться, например, на принцип индукции, который он, без сомнения, не признал бы, но который он предполагал доказать далее. Он должен был бы идти дальше; это произошло бы ценой логической ошибки, но по меньшей мере мы в этом были бы уверены.

6. Употребление бесконечности

Можно ли рассуждать об объектах, которые не могут быть определены конечным числом слов? Можно ли даже говорить о них, зная, о чем говорят, и произнося нечто иное, чем пустые слова? Или же, наоборот, их следует рассматривать как непознаваемые? Что касается меня, то я не колеблюсь ответить, что они просто не существуют.

Все объекты, которые мы сможем когда-нибудь себе представить, или будут определены конечным числом слов, или же будут определены только несовершенно и останутся неотделимыми от массы других объектов; и мы не сможем исследовать их логически строго до того, как мы их отделим от этих других объектов, с которыми они связаны, т. е. до того, как мы придем к определению их конечным числом слов.

Если мы рассмотрим множество и захотим определить различные его элементы, то это определение, очевидно, разобьется на две части: первая часть определения, общая всем элементам множества, научит нас отделять их от элементов, чуждых этому множеству; это будет определение множества; вторая часть научит нас отличать одни от других различные элементы множества.

Каждая из этих двух частей должна будет складываться из конечного числа слов. Если говорят о всех элементах того множества, определение которого хотят дать, то хотят говорить о всех объектах, удовлетворяющих первой части определения, которые могут быть окончательно определены такой фразой из конечного числа слов, какая будет желательна. Вам дают только половину определения, вы можете затем ее дополнить, выбрать по своему желанию вторую половину, но необходимо, чтобы вы ее дополнили. Когда я утверждаю некоторое положение, касающееся всех объектов множества, я хочу этим сказать, что если один объект удовлетворяет первой части определения, то предложение в части, касающейся этого объекта, останется справедливым, какими бы способами вы ни формулировали вторую часть; но так как вы можете ее высказать по своему желанию, то необходимо, чтобы вы и высказали, без этого объект был бы немыслим и предложение не имело бы смысла.

Это не значит, что нельзя сделать или что не сделаны некоторые замечания по поводу этой точки зрения. Фразы из конечного числа слов всегда могут быть перечислены, так как, например, их можно расположить в алфавитном порядке. Если все мыслимые объекты следует определить подобными фразами, то им также можно будет присвоить определенный номер. Следовательно, мыслимых объектов будет не больше, чем целых чисел; и если рассматривают, например, пространство, если из него исключают точки, которые не могут быть определены конечным числом слов и которые просто не существуют, то точек останется не больше, чем имеется целых чисел. Кантор же доказал противное.

Но это только обман зрения; представить точки пространства определяющими их фразами, распределить эти фразы и соответствующие им точки по буквам, из которых они составлены, — это значит построить классификацию, которая является непредикативной, которая влечет за собой все неудобства, все параллогизмы, все противоречия, о которых я говорил в начале этой главы. Что хотел сказать Кантор и что он в действительности доказал? Нельзя найти между целыми числами и точками пространства, определяемыми конечным числом слов, закон соответствия, удовлетворяющий следующим условиям: 1) этот закон может быть высказан конечным числом слов; 2) для любого заданного целого числа всегда можно найти соответствующую точку пространства, и эта точка будет полностью и однозначно определена; определение этой точки складывается из двух частей: определения целого числа и выражения закона соответствия, и сведется к конечному числу слов, так как наше целое число может быть определено, а закон выражен конечным числом слов; 3) для заданной точки пространства P, которую я предполагаю определенной конечным числом слов (не запрещая себе допускать в это определение ссылки на сам закон соответствия, что существенно в доказательстве Кантора), найдется целое число, которое будет однозначно определено законом соответствия и определением точки P; 4) закон соответствия должен быть предикативным, т. е. если он приводит в соответствие точку P и целое число, то это соответствие тому же целому числу не должно нарушиться, когда введут новые точки пространства. Вот что доказал Кантор, и это остается всегда справедливым; ясно, насколько сложен смысл, скрытый в кратком предложении: число точек пространства больше, чем число целых чисел.

Что же мы должны отсюда заключить? Всякая теорема математики должна быть доступна проверке. Когда я высказываю эту теорему, я утверждаю, что все проверки, которые я испробую, приведут к желаемому результату, и даже если одна из этих проверок требует труда, превосходящего человеческие силы, я утверждаю, что если много поколений сочтут нужным заняться этой проверкой, то и в этом случае она удастся. Теорема не имеет другого смысла; это остается верным и тогда, когда в ее формулировке говорится о бесконечных числах; но так как проверки могут быть проведены только для конечных чисел, то отсюда следует, что всякая теорема, относящаяся к бесконечным числам или вообще к тому, что называется бесконечным множеством, или трансфинитным количественным, или трансфинитным порядковым и т. д., не может быть чем-либо иным, как сокращенным способом формулирования предложений, относящихся к конечным числам. Если дело обстоит иначе, то эта теорема недоказуема, а если она недоказуема, то она не будет иметь смысла.

Следовательно, нельзя найти очевидные аксиомы, относящиеся к бесконечным числам; всякое свойство бесконечных чисел есть лишь перевод какого-либо свойства конечных чисел; именно это последнее может быть очевидным, тогда как первое необходимо доказать, сравнивая его с последним и показывая, что перевод точен.

7. Заключение

Противоречия, к которым пришли некоторые логики, происходят из-за того, что они не смогли избежать известных порочных кругов. Это случалось с ни-