

реводом, сокращенным выражением предложений, относящихся к конечному;

3) избегать непредикативных классификаций и определений.

Все исследования, о которых мы говорили, имеют общий характер. Предлагается преподавать математику ученику, который еще не знает разницы между бесконечным и конечным; ему не торопятся преподавать, в чем заключается эта разница, начинают с того, что показывают ему все то, что можно знать относительно бесконечности, не занимаясь этой разницей; затем в ограниченном районе того поля, которое ему дали обозреть, открывают ему маленький уголок, где прячутся конечные числа.

Мне это кажется психологически неверным; естественно, человеческий ум идет не так, и даже если бы пришлось отклониться от этого без особо неприятных противоречий, то тем не менее это был бы метод, противоречащий всякой здоровой психологии.

Рассел, без сомнения, мне скажет, что он занимается не психологией, а логикой и эпистемологией; я же вынужден буду ответить, что нет логики и эпистемологии, независимых от психологии; и это признание, вероятно, прекратит спор, так как выявит непоправимое расхождение взглядов.

Глава V

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Несколько лет тому назад я имел случай предложить некоторые идеи, относящиеся к логике бесконечного, к применению бесконечности в математике, к тому употреблению, которое сделали ей вслед за Кантором; я объяснил, почему я не считаю законным некоторые способы рассуждений, которыми считали себя вправе пользоваться различные выдающиеся математики¹⁾. Естественно, я вызвал против себя строгие реплики; эти математики не считают, что они ошиблись, и они считают, что имели право делать то, что делали. Полемика затянулась, но не потому, что без конца приводились новые аргументы, а потому, что

¹⁾ См. главу IV этой работы. — *Примеч. ред.*

все время вертелись в одном и том же круге, каждый повторял то, что он уже говорил, как будто не слыша того, что ему говорил противник. Поминутно мне присылали новое доказательство оспариваемого принципа, чтобы оградиться, как говорили, от всяких возражений; но это доказательство было все тем же самым, лишь слегка загримированным. Конечно же, не пришли ни к какому заключению; сказать, что я этим удивлен, значило бы дать весьма печальное представление о моей психологической проницательности. При таких условиях приходится еще раз повторить свои аргументы, которым я, пожалуй, могу придать новую форму, но сущности которых я не могу изменить, так как мне кажется, что их даже не пытались опровергнуть. Мне кажется, что предпочтительнее выяснить, в чем основа этого расхождения мыслей, порождающего подобное различие взглядов. Я скажу, что эти непримиримые разногласия меня не удивили, что предвидел их с самого же начала, но это не избавляет нас от поисков объяснения; можно предвидеть факт после ряда повторных опытов и затрудняться в объяснении его.

Попытаемся же изучить психологию двух спорящих школ с точки зрения вполне объективной, как будто мы сами находимся вне этих школ, как будто мы описываем войну двух муравейников. Прежде всего заметим, что среди математиков существуют две противоположные тенденции в способе представления бесконечности. Для одних бесконечность происходит из конечного; бесконечность существует потому, что существует бесконечное множество всевозможных конечных предметов; для других же бесконечность существует раньше конечного; конечное получается отрезанием маленького кусочка от бесконечности.

Теорема должна быть проверяемой, но так как мы сами конечны, то мы можем оперировать только с конечными объектами; даже если в формулировке теоремы участвует понятие бесконечности, необходимо, чтобы при проверке его не употребляли, иначе проверка станет невозможной. В качестве примеров я возьму следующие теоремы: последовательность простых чисел бесконечна, ряд $\sum 1/n^2$ сходящийся и т. д.; каждая из них может быть выражена равенствами, в которых фигурируют только конечные числа. Эти теоремы связаны с бесконечностью не потому, что одна

из возможных проверок связана с нею, а потому, что число возможных проверок бесконечно.

Высказав теорему, я утверждаю, что все эти проверки будут успешны; очевидно, что всех их не проделывают; я их называю возможными потому, что их можно проделать за конечное время, но практически они могут быть невозможными, так как потребуют многих лет работы. Для меня достаточно того, что можно представить себе такого достаточно богатого и сумасбродного человека, который занялся бы этим, оплачивая достаточно число помощников. Доказательство теоремы как раз и имеет задачей сделать ненужным это сумасбродство.

Имеет ли смысл теорема, которая не приводит ни к какому проверяемому выводу? Или, выражаясь более общо, имеет ли смысл теорема без тех проверок, которые она вызывает? В этом вопросе математики разделились. Принадлежащие к первой школе, я их назову прагматистами (ведь нужно же дать им какое-нибудь имя), отвечают «нет», и когда им предлагают теорему без указания способа ее проверки, они смотрят на нее как на нечто невразумительное. Они не желают ничего представлять себе, кроме объектов, которые могут быть определены конечным числом слов. Когда в рассуждении им говорят об объекте A , удовлетворяющем определенным условиям, они усматривают под этим объект, который удовлетворяет этим условиям, каковы бы при этом ни были слова, использованные для его окончательного определения, лишь бы их было конечное число.

Принадлежащие к другой школе, их я назову для краткости канторианцами, не желают принимать этого; человек, каким бы он ни был болтуном, никогда в своей жизни не произнесет более миллиарда слов; а тогда исключим ли мы из науки объекты, определение которых содержит миллиард и одно слово? И если мы их не исключим, то почему же мы исключим те объекты, которые могут быть определены только бесконечным числом слов, ведь построение как одних, так и других превосходит человеческие способности?

Но эти аргументы, как известно, не трогают прагматистов; как бы ни был болтлив один человек, человечество будет еще более болтливо, и так как мы не знаем, сколько времени оно будет существовать,

то мы не можем заранее ограничить поле его изысканий; мы знаем только одно, что это поле будет всегда оставаться ограниченным; и даже если бы мы могли определить дату исчезновения человечества, то существуют другие звезды, которые смогут принять неоконченный труд Земли; прагматисты даже согласны без особого отвращения представить себе человечество, несравненно более болтливое, чем наше, сохраняя все-таки за ним кое-что человеческое; но они отказываются рассуждать по поводу гипотезы уж я не знаю какого божества, бесконечно болтливого и могущего мыслить бесконечное число слов в конечное время. Канторианцы же, наоборот, предполагают, что объекты существуют в своего рода большом складе, независимо от всего человечества или всякого божества, которое могло бы о них говорить или думать; в этом магазине мы, без сомнения, можем выбирать, но, наверное, мы не имеем достаточно аппетита или средств, чтобы купить все; при этом инвентарь магазина не зависит от ресурсов покупателей. Из этого-то исходного недоразумения следуют всевозможные разногласия в деталях.

Возьмем для примера теорему Цермело, по которой пространство может быть преобразовано во вполне упорядоченное множество. Канторианцы будут пленены строгостью, действительной или кажущейся, доказательства; прагматисты им ответят: «вы говорите, что можете преобразовать пространство в хорошо упорядоченное множество: хорошо! Преобразуйте». «Это будет слишком долго». «Тогда по крайней мере покажите нам, что кто-либо, имеющий достаточно времени и терпения, мог бы произвести это преобразование». «Нет, мы этого не можем, так как число операций, которые необходимо проделать, бесконечно, оно больше даже, чем алеф-нуль». «Можете ли вы показать, как можно будет выразить конечным числом слов закон, который позволил бы упорядочить пространство?» «Нет». И прагматисты заключают, что теорема лишена смысла или неверна, или по крайней мере не доказана.

Прагматисты становятся на точку зрения расширения, а канторианцы — на точку зрения выделения. Когда речь идет о конечной совокупности, это различие может интересовать только теоретиков формаль-

ной логики; но оно кажется нам гораздо более глубоким, когда речь идет о бесконечных совокупностях. Если встать на точку зрения расширения, совокупность образуется последовательными прибавлениями новых членов; мы можем, комбинируя старые объекты, создавать новые, затем с помощью этих — еще более новые, и если совокупность бесконечна, то только потому, что нет причин, чтобы остановиться.

С точки зрения выделения, наоборот, мы исходим из совокупностей, в которых находятся предсуществующие объекты, которые кажутся нам сначала неразличимыми; но мы, наконец, начинаем различать некоторые из них потому, что мы снабжаем их этикетками и распределяем по ящикам; однако объекты предшествуют этикеткам, и совокупность существовала бы даже тогда, когда не нашлось бы коллекционера для ее классификации.

Для канторианцев понятие кардинального числа не составляет тайны. Две совокупности имеют одинаковое кардинальное число, когда их можно расположить в одних и тех же ящиках; нет ничего проще этого, поскольку обе совокупности предсуществуют и поскольку точно так же можно рассматривать как предсуществующую совокупность ящиков, независимых от коллекционера, заинтересовавшегося распределением по ним объектов. Для прагматистов это не так; совокупность не предсуществует, она каждый день обогащается: новые объекты без конца прибавляются к ней так, что их нельзя было бы определить, не опираясь на понятие объектов, уже ранее классифицированных, и на способ их классификации. При каждом новом приобретении коллекционер может быть вынужденным перерыть свои ящики, чтобы найти способ пристроить его на место; никогда не будет известно, могут ли две совокупности расположиться в тех же ящиках, так как всегда можно ожидать необходимости произвести среди них перемещения. Например, прагматисты принимают только объекты, которые могут быть определены конечным числом слов. Возможные определения, выражаемые с помощью фраз, всегда могут быть перенумерованы порядковыми числами от одного до бесконечности, поэтому у них будет возможно только одно бесконечное количественное число алеф-нуль. Почему тогда, спросим мы,

мощность континуума не такая же, как и мощность целых чисел? Да, когда даны все точки пространства, которые мы умели определять словами в конечном числе, мы можем представить себе закон, выражаемый также конечным числом слов, который приводит их в соответствие с последовательностью целых чисел. Но рассмотрим теперь фразы, где фигурирует формулировка этого закона соответствия; только что они не имели никакого смысла, так как этот закон еще не был изобретен, и они не могли служить для определения точек пространства; теперь они приобрели смысл, они позволяют нам определить новые точки пространства, но эти новые точки не будут уже иметь места в принятой классификации, и это заставит нас изменить ее. Это-то мы и хотим сказать, когда, следуя прагматистам, говорим, что мощность континуума не та же, что мощность целых чисел. Мы хотим сказать, что невозможно найти такой закон соответствия между этими двумя совокупностями, который был бы защищен от подобных изменений в том смысле, как это можно сделать, например, когда речь идет о прямой и плоскости. И в таком случае, собственно говоря, прагматисты не уверены в том, что некоторое множество имеет кардинальное число или же что для двух заданных множеств всегда можно узнать, имеют ли они одну и ту же мощность или одно из них имеет мощность бóльшую, чем другое. Таким образом, они приходят к сомнению в существовании числа алеф-один.

Другой источник разногласия возникает в способе понимания определений. Существуют определения многих видов; прямое определение может быть сделано как по *genus proximum et differentiam specificam*¹⁾, так и по построению.

Отметим попутно, что имеются определения, неполные в этом смысле: они определяют не один индивидуум, но сразу целый род; они законны, и именно они являются определениями, которыми чаще всего пользуются. Но, следуя прагматистам, под ними нужно дополнительно понимать совокупность индивидуумов, которые удовлетворяют определению и которые можно полностью определить конечным числом слов;

¹⁾ См. споску на с. 585.

для канторианцев это ограничение является искусственным и лишенным значения.

Если бы были только прямые определения, то бесилие чистой логики было бы неоспоримо. В этом случае можно было бы в любом предложении заменить каждый из его членов определением; если бы произвели такую подстановку, то или предложение не свелось бы к тождеству, и тогда оно было бы недоступно чисто логическому доказательству, или же оно свелось бы к тождеству, и тогда оно было бы не чем иным, как тавтологией, более или менее искусно замаскированной.

Но мы имеем еще другой вид определенний: определения через постулат. Обычно мы будем знать, что определяемый объект принадлежит к некоторому роду, но когда дело пойдет о том, чтобы высказать специфическое различие, то его выскажут не прямо, а с помощью «постулата», которому должен удовлетворять определяемый объект. Именно таким образом математики могут определить количество x посредством явного уравнения $x = f(y)$ или неявного $F(x, y) = 0$.

Определение через постулат имеет значение только тогда, когда доказано существование определяемого объекта; на языке математики это означает, что постулат не содержит противоречий; этим условием мы не имеем права пренебрегать; нужно либо предположить отсутствие противоречия как интуитивную истину, как аксиому, с помощью некоторого акта веры, но тогда нужно отдавать себе отчет в том, что делаешь, и знать, что увеличен список недоказуемых аксиом; либо же следует построить доказательство по правилам: или с помощью примера или применить рекуррентное рассуждение. Это не значит, что такое доказательство было бы менее необходимо в случае прямого определения, но оно в этом случае более просто.

Некоторые прагматисты окажутся более требовательными: чтобы рассматривать определение как законное, им недостаточно того, чтобы оно не приводило к противоречию в терминах, им еще будет нужно, чтобы оно имело смысл с той особой их точки зрения, которую я пытался определить выше.

Как бы то ни было, но останется ли логика бесполезной после введения определений через постулаты?

Мы не можем при задании предложения заменить в нем некоторый член через его определение; все, что мы можем сделать,— это исключить этот член при помощи предложения и постулата, служащего ему определением. Если эта операция, сделанная, как говорят, по правилам логического исключения, не приводит нас к тождеству, то это показывает, что предложение недоказуемо посредством чистой логики; если она приводит к тождеству, то это значит, что оно только тавтология. Нам не нужно ничего изменять в наших предыдущих заключениях.

Но существует третий вид определений, который является началом нового недоразумения между прагматистами и канторианцами. Это все еще определения через постулат, но постулатом здесь является некоторое отношение между определяемым объектом и всеми индивидуумами класса, к которому по предположению принадлежит определяемый объект (или же к которому по предположению принадлежат объекты, которые сами могут быть определены через определяемый объект). Это происходит, когда мы устанавливаем следующие два постулата:

X (определяемый объект) так-то связан со всеми индивидуумами рода G ,

X входит в состав рода G .

Или же следующие три постулата:

X так-то связан со всеми индивидуумами рода G ,

Y так-то связан с X ,

Y входит в состав G .

С точки зрения прагматистов подобное определение вовлекает в порочный круг. Нельзя определить X , не зная всех индивидуумов рода G и, следовательно, не зная X , которое является одним из этих индивидуумов. Канторианцы смотрят иначе: род G нам дан, следовательно, мы знаем все индивидуумы; определение имеет целью только выделить из этих индивидуумов тот, который находится со всеми своими товарищами в указанной зависимости. Нет, отвечают их противники, знание вида и рода не дает вам знания всех его индивидуумов, оно дает вам только возможность построить их все или — лучше — построить их столько, сколько вы пожелаете. Они будут существовать не ранее, чем вы их построите, т. е. после того, как они будут определены; X существует только после

определения, которое имеет смысл только после того, как мы наперед знаем все индивидуумы G и, в частности, X . Не имеет никакого значения, прибавляют они, утверждение, что определять X через его зависимость с G не будет порочным кругом и что эта зависимость в итоге не является постулатом, который может служить для определения X ; необходимо предварительно доказать, что этот постулат не содержит в себе противоречия, но этого обыкновенно не делают в определениях такого рода. Прежде всего доказывают, что, каков бы ни был род G , все индивидуумы которого предполагаются известными, существует сущность X , которая связана с видом рассматриваемой зависимостью, т. е. что существование этой сущности не влечет за собой противоречия. Остается показать, что нет противоречий между существованием этой сущности и гипотезой, что эта сущность сама входит в состав рода.

Спор мог бы длиться долго, но вопрос, который я хочу выяснить, заключается в том, что если бы этот род определений был принят, логика уже не была бы бесплодной, и доказательством этого служит то, что было построено много рассуждений с целью доказать предложения, которые вовсе не были тавтологиями уже потому, что есть люди, которые задаются вопросом, не ложны ли они. И вот тогда удивляешься силе, которую может иметь одно слово.

Вот объект, о котором ничего нельзя было сказать, пока он не был окрещен; достаточно было дать ему имя, чтобы произошло чудо. Каким образом это происходит? Это происходит потому, что, давая ему имя, мы тем самым неявно утверждаем, что объект существует (т. е. свободен от всех противоречий) и что он полностью определен. Но это нам ничего не даст из того, что требуют прагматисты. Каков же механизм, делающий доказательство плодотворным? Очень простой: отвергают доказываемое предложение и показывают, что в таком случае получается противоречие с существованием объекта X ; но это правильно только в том случае, когда уверены в его существовании и, с другой стороны, когда знают, что объект полностью определен. Действительно, если X вывести из рода G по определению и если затем дополнить род G , прибавляя к нему объект X и другие индиви-

дуумы того же рода, которые могут быть из него произведены, если назвать G' дополненный таким способом род и назвать X' то, что получится из G' по определению тем же способом, каким X выводится из G , то необходимо, чтобы была уверенность в тождественности X' с X . Если бы это было не так, то, отвергнув доказываемое предложение, пришли бы к двум противоречащим формулировкам:

$$\varphi_1(X) = 0, \quad \varphi_2(X) = 0.$$

Каким образом можно убедиться, что как в одной, так и в другой X совершенно одно и то же? Если бы в одном выражении фигурировало X , а в другом X' , то оба утверждения записались бы в виде

$$\varphi_1(X) = 0, \quad \varphi_2(X') = 0$$

и не были бы противоречащими друг другу.

Почему же прагматисты делают такое возражение? Потому, что род G представляется только как совокупность, которая может бесконечно увеличиваться по мере того, как будут строиться новые индивидуумы, обладающие необходимыми свойствами. Таким образом, никогда нельзя считать, что G не *variatur* (неизменно), как это делают канторианцы, и никогда нельзя быть уверенным в том, что путем новых прибавлений оно не превратится в G' .

Я старался объяснить, как только мог, ясно и беспристрастно, в чем заключается расхождение между двумя школами математиков, и мне кажется, что мы уже замечаем действительную причину. Ученые этих двух школ имеют противоположное направление мыслей: те, которых я назвал прагматистами,— идеалисты, канторианцы же — реалисты.

Одно обстоятельство укрепит нас в нашей точке зрения. Мы видим, что канторианцы (да простят мне это удобное название, хотя я и хочу говорить здесь не о математиках, следующих взглядам Кантора, может быть, даже не о философах, ссылающихся на него, но только о тех, кто независимо от него имеет те же тенденции), что канторианцы, говорю я, постоянно говорят об эпистемологии¹⁾, т. е. об учении о науках, и

¹⁾ Пуанкаре в данном контексте использует понятие «эпистемология» не в традиционном его понимании (теория познания, гносеология), а для обозначения воззрений логицистов. Го-

хорошо известно, что эта эпистемология совершенно независима от психологии, т. е. что она учит нас, чем бы была наука, если бы не было ученых. Мы должны изучать эту науку, конечно, не предполагая, что ученых нет, но по крайней мере не предполагая, что они есть. Таким образом, не только природа есть реальность, независимая от физика, который стремится ее изучить, но и сама физика есть реальность, которая существовала бы и тогда, когда не было бы физика. В этом ведь и заключается реализм.

Почему прагматисты отказываются признавать объекты, которые нельзя определить конечным числом слов? Потому что они считают, что объект существует, только когда о нем подумали, и что нельзя сознавать мыслимый объект независимо от мыслящего. А в этом-то и заключается идеализм. И так как мыслящим является человек или что-либо похожее на человека, следовательно, существо конечное, то бесконечность и не может иметь другого смысла, кроме возможности создать столько конечных предметов, сколько нам угодно.

В этом случае можно сделать довольно любопытное замечание. Реалисты обычно встают на физическую точку зрения: независимое существование они приписывают материальным объектам или индивидуальным душам, или тому, что они называют субстанциями. Мир для них существовал до сотворения человека и даже ранее всех живых существ и существовал бы и в том случае, если бы не было ни бога

вора о «реализме» канторианцев, он подчеркивает платонистский характер истолковывания ими математических объектов. Например, Г. Фреге заявлял, что математик, подобно географу, открывает математические сущности, которые существуют так же, как материки и острова. Платонистский «привкус» канторовской теоретико-множественной установки раскрывает Г. И. Рузавин «Легко обнаружить сходство между божественным миром идей Платона, куда он помещает математические сущности, и внемировым бытием Кантора, где реализуется актуальная бесконечность. Но дело не только в идейном и терминологическом сходстве. Платонистская концепция в неявном виде содержится в самих основах «наивной», неканторовской теории множеств» (Рузавин Г. И. Теория отражения и некоторые гносеологические проблемы математики // Лешинская теория отражения и современность — София. Наука и искусство, 1969 — С. 556) Критика Пуанкаре платонистского понимания математических объектов была энергично поддержана интуиционистами и в первую очередь Л. Брауэром и Г. Вейлем. — *Примеч. ред.*

и никакой другой мыслящей сущности. Это точка зрения здравого смысла, и только размышление может заставить отказаться от нее. Сторонники физического реализма — обычно финитисты; в вопросе о канторовских антиномиях они принимают тезы, они считают, что мир ограничен. Таков, например, взгляд Эвеллина. Напротив, идеалисты не имеют таких предрассудков и близки к тому, чтобы подписаться под антитезами.

Но канторианцы — реалисты именно в том, что относятся к сущностям математики; эти сущности кажутся им имеющими независимое существование; геометр их не создает, он их открывает. Эти объекты, так сказать, существуют, не существуя, так как они сводятся к чистым отвлечениям; но поскольку по природе своей эти объекты бесконечны числом, то сторонники математического реализма — гораздо более инфинитисты, чем идеалисты; их бесконечность не есть будущее, так как она предшествует в своем существовании открывшему ее уму; принимают ли они ее или отрицают, они должны верить в действительную бесконечность.

Мы узнаем в этой теории идей Платона. Может показаться странным видеть Платона среди реалистов, однако пока нет ничего более противоположного современному идеализму, чем платонизм, хотя эта доктрина в то же время очень далека от физического реализма.

Я никогда не знал математика, большего реалиста в платоновском смысле, чем Эрмит, и, однако, я должен признаться, что я не встречал человека, более непокорного учению Кантора. В этом есть кажущееся противоречие, тем более, что он часто повторял: я антиканторианец, потому что я реалист. Он упрекал Кантора за то, что тот создавал объекты вместо того, чтобы удовлетворяться тем, чтобы их открывать. Без сомнения, вследствие своих религиозных убеждений, он считал грешным желание в полной мере проникнуть в область, объять которую может один бог, и не дожидаться, пока он сам откроет нам эти тайны поодиночке. Он сравнивал математические науки с естественными науками. Натуралист, который попытался бы отгадать секрет бога, вместо того чтобы обратиться к опыту, казался ему не только

самонадеянным, но и не почтительным к божественному величию. Канторианты, казалось ему, стремятся действовать именно так в математике. Поэтому-то он, реалист в теории, был идеалистом на практике. Существует познаваемая реальность, она вне нас и не зависит от нас; но все то, что мы можем о ней знать, зависит от нас — это не что иное, как будущее, некоторого рода наслаивание последовательных побед. Остаток реален, но вечно непознаваем.

Однако случай Эрмита особый, и я о нем не буду больше говорить. Во все времена в философии были противоположные течения, и не видно, чтобы эти течения стремились примириться. Без сомнения, существуют различные души, и мы ничего не можем в них изменить. Нет никакой надежды увидеть установившееся согласие между прагматистами и канторианцами. Люди не понимают друг друга потому, что они не говорят на одном и том же языке, и потому, что есть языки, которые не могут быть изучены.

В то же самое время в математике имеют обыкновение понимать друг друга; и это именно благодаря тому, что я назвал проверками; они являются окончательными судьями, и перед ними склоняется всякий. Но там, где этих проверок нет, математики не проникают дальше простых философов. Когда речь идет о том, имеет ли смысл непроверяемая теорема, кто может выносить суждение, если проверять ее запрещено по определению? Остается только привести своего противника к противоречию. Но попытка была сделана и ничего не достигла.

Было отмечено много противоречий, и несогласие осталось; никто не был убежден. От противоречий всегда можно избавиться удачным приемом, а именно: *distinguo*¹⁾.

Глава VI

ВЗАИМООТНОШЕНИЯ МАТЕРИИ И ЭФИРА

Когда Абрагам просил меня заключить серию собраний, организованных французским Физическим обществом, я сперва хотел отказаться. Мне казалось,

¹⁾ Латинское выражение, означающее «я различаю». — *Примеч. ред.*