III. Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Уже Кеплеру было известно, что эти законы, завершившие создание эмпирической кинематики солнечной системы, не абсолютно строги. Хотя для планет они выполняются с большой точностью (особенно два первых), но чтобы представить сколько-нибудь удовлетворительно движение Луны, нужно было еще сделать эллиптическую орбиту подвижной и добавить эвекцию и вариацию. Причины всех этих отклонений стали ясны после открытия закона всемирного тяготения.

Вскоре после появления гелиоцентрической теории Эразм Рейнгольд составил основанные на ней новые таблицы движения светил, более точные и более подробные, нежели таблицы самого Коперника. Эти таблицы, названные им «Прусскими таблицами» (Tabulae Prutenicae, 1551), быстро вытеснили «Альфонсовы таблицы», имевшие еще широкое распространение.

Открыв свои первые два закона, Кеплер приступил к составлению основанных на них таблиц. Они были опубликованы в 1627 г. под названием «Рудольфовых таблиц» (Tabulae Rudolphinae) и по своей точности далеко превзошли все прежние таблицы.

§ 3. Движение по законам Кеплера

Покажем, как координаты планеты, движущейся вокруг Солнца по законам Кеплера, могут быть выражены в функции времени.

Центр C эллипса, описываемого планетой M (рис. 3) примем за начало координат; за ось Cx примем направление большой полуоси $C\Pi = a$, проходящей через фокус S, в котором находится Солнце; за ось Cy примем направление малой полуоси $CB = b$.

Уравнение эллипса в этой системе координат

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

заменим параметрическими уравнениями, выбрав параметр следующим образом. Из точки $M(x, y)$, изображающей положение планеты, опустим перпендикуляр MN на ось абсцисс. Продолжение этого перпендикуляра до пересечения с окружностью, описанной на большой оси эллипса $A\Pi$ как на диаметре, дает точку M'. Задание каждой из точек M и M' однозначно определяет другую. Но положение точки M' можно определить углом E, отсчитываемым от большой полуоси $C\Pi$ до радиуса CM' в направлении движения планеты. Этот угол называется эксцентрической аномалией.

Уравнение (3.1) эквивалентно параметрическим уравнениям

$$x = a\cos E, \qquad y = b\sin E.$$

Отношение $e = CS/C\Pi$, характеризующее форму эллипса, называется его **эксцентриситетом**. Очевидно,

$$CS = ae, \quad CB = b = a\sqrt{1-e^2}.$$

Введем теперь систему прямоугольных орбитальных координат $S\xi\eta$, оси которой параллельны осям системы Cxy, а начало находится в фокусе S. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a\cos E - ae, \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2}\sin E. \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

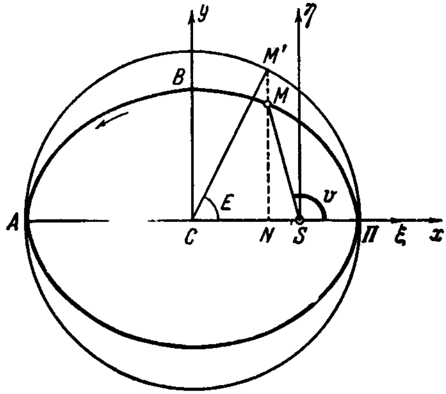

Рис. 3.

Через r и v обозначим полярные орбитальные координаты, соответствующие ξ и η. Угол v, отсчитываемый от радиуса-вектора $S\Pi$, направленного в перигелий П, называется **истинной аномалией** планеты.

Так как

$$\xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v, \quad (3.3)$$

то сравнение равенств (3.2) и (3.3) дает следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} r\sin v &= a\sqrt{1-e^2}\sin E, \\ r\cos v &= a(\cos E - e), \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

служащие для вычисления полярных орбитальных координат, когда задано E.

Из формул (3.4) легко находим

$$r = a(1 - e\cos E). \qquad (3.5)$$

Комбинирование этого равенства со вторым из равенств (3.4) дает

$$r(1-\cos v) = a(1+e)(1-\cos E),$$
$$r(1+\cos v) = a(1-e)(1+\cos E),$$

или

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r}\sin\frac{v}{2} &= \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E}{2}, \\ \sqrt{r}\cos\frac{v}{2} &= \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

причем двойственность знака при извлечении корня устраняется тем соображением, что $\frac{1}{2}v$ и $\frac{1}{2}E$ находятся всегда в одном и том же квадранте (значению $E=180°$ соответствует $v=180°$).

Из (3.6) вытекает следующая часто употребляемая формула:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{3.7}$$

Таким образом, для вычисления r и v по заданному E можно вместо (3.4) употреблять либо формулы (3.6), либо формулы (3.5) и (3.7).

Заметим еще, что исключение E из равенств (3.4) и (3.5) дает уравнение эллипса в полярных координатах

$$r=p/(1+e\cos v), \tag{3.8}$$

где $p=a(1-e^2)$ есть параметр эллипса, т. е. ордината точки, для которой $v=90°$.

Полезно напомнить, что уравнение (3.8) является общим уравнением конических сечений. При $e=1$ оно представляет параболу, а при $e>1$ — ветвь гиперболы, вогнутую по отношению к фокусу S.

Обратимся теперь ко второму закону Кеплера. Если через T и t обозначить моменты времени, в которые планета занимает положения П и M, а через P обозначить период обращения планеты, то этот закон даст такое соотношение:

$$\frac{Q}{\pi ab}=\frac{t-T}{P}, \tag{3.9}$$

где через Q обозначена площадь сектора $S\Pi M$.

Вычислим Q. Если через A обозначить площадь криволинейной трапеции $NM\Pi$, то

$$Q=A-\text{пл. }\Delta NMS. \tag{3.10}$$

Соотношения (3.4) показывают, что

$$\text{пл. }\Delta NMS=-\frac{1}{2}r^2\sin v\cos v=-\frac{1}{2}ab\sin E(\cos E-e).$$

С другой стороны, имеем

$$A=\frac{b}{a}A',$$

где через A' обозначена площадь криволинейной трапеции $NM'\Pi$.

Легко видеть, что

$$A'=\frac{1}{2}a^2(E-\sin E\cos E).$$

Подстановка полученных выражений в равенство (3.10) дает

$$Q = \frac{1}{2} ab (E - e \sin E),$$

вследствие чего уравнение (3.9) можно написать так:

$$E - e \sin E = M, \tag{3.11}$$

где

$$M = n(t - T), \qquad n = 2\pi/P.$$

Величина n, представляющая среднюю скорость изменения угла E, называется средним движением планеты; величина M получила название средней аномалии; а уравнение (3.11) называется уравнением Кеплера.

Зная элементы орбиты a, e, P и T, мы можем, после того как уравнение Кеплера решено относительно E, вычислить орбитальные координаты планеты либо по формулам (3.2), либо по формулам (3.4) или (3.5), (3.7).

Примечание. При небольших значениях e орбитальные координаты удобно представить, пользуясь разложениями в ряды, в виде явных функций времени. В главе VI этот вопрос будет рассмотрен подробно. Сейчас покажем только, что первые члены таких разложений легко получить элементарными приемами.

Уравнение (3.11), написанное в форме

$$E = M + e \sin E,$$

дает в первом приближении

$$E = M + e \sin M.$$

Во втором приближении имеем

$$E = M + e \sin (M + e \sin M),$$

или

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \ldots \tag{3.12}$$

Следовательно,

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + e^2 \sin^2 M + \frac{3}{2} e^3 \cos M \sin^2 M + \ldots \tag{3.13}$$

Из формул (3.4) легко находим, что

$$dv = \frac{\sqrt{1 - e^2}\, dE}{1 - e \cos E},$$

тогда как уравнение Кеплера дает

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{1 - e \cos E}.$$

Следовательно,

$$dv = \sqrt{1-e^2}\,\frac{dE}{dM}\,dE = \sqrt{1-e^2}\left(\frac{dE}{dM}\right)^2 dM.$$

Подставив сюда выражение (3.12) и проинтегрировав, получим

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M - \\ - \frac{4}{3}e^3\sin M\left(1 - \frac{13}{4}\cos^2 M\right) + \ldots \quad (3.14)$$

Эти разложения позволяют удобно сравнить эллиптическое движение с движением по эксцентрику, которым пользовались до Кеплера.

Движение по эксцентрику — это движение равномерно обращающейся точки M', видимое из точки S (рис. 3). Обозначая по-прежнему через r и v радиус-вектор и истинную аномалию точки M', а через $\varepsilon = CS/C\Pi$ — эксцентриситет, и замечая, что для рассматриваемого теперь движения $E = M = n(t-T)$, легко найдем

$$r = a(1 - 2\varepsilon\cos M + \varepsilon^2)^{1/2}; \qquad \operatorname{tg} v = \frac{\sin M}{\cos M - \varepsilon},$$

откуда

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos M + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2 M + \frac{1}{2}\varepsilon^3\cos M\sin^2 M + \ldots,$$

$$v = M + \varepsilon\sin M + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin 2M - \frac{1}{3}\varepsilon^3\sin M(1 - 4\cos^2 M) + \ldots$$

Сравнение этих формул с предыдущими показывает, что взяв $\varepsilon = 2e$, мы представим изменение v с ошибкой порядка e^2, но в r ошибка будет порядка e; если же взять эксцентрик, для которого $\varepsilon = e$, то хорошо представятся радиусы-векторы, но представление угловой координаты будет неудовлетворительно.

§ 4. Динамические следствия законов Кеплера

Законы Кеплера существенно помогли Исааку Ньютону (1642—1727) завершить открытие основных законов динамики, начатое Галилеем (1564—1642), Декартом (1596—1650) и Гюйгенсом (1629—1695). Создание динамики позволило в свою очередь совсем по-новому подойти к вопросу о движении планет. Вместо смутных представлений о причине планетных движений, коренящейся в Солнце, которые руководили Коперником и, в гораздо более отчетливой форме, Кеплером, Ньютон смог изучить явление количественно и найти силу, производящую движение планеты.