Следовательно,

$$dv=\sqrt{1-e^2}\,\frac{dE}{dM}\,dE=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{dE}{dM}\right)^2 dM.$$

Подставив сюда выражение (3.12) и проинтегрировав, получим

$$v=M+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M-$$
$$-\frac{4}{3}e^3\sin M\left(1-\frac{13}{4}\cos^2 M\right)+\ldots \quad (3.14)$$

Эти разложения позволяют удобно сравнить эллиптическое движение с движением по эксцентрику, которым пользовались до Кеплера.

Движение по эксцентрику — это движение равномерно обращающейся точки M', видимое из точки S (рис. 3). Обозначая по-прежнему через r и v радиус-вектор и истинную аномалию точки M', а через $\varepsilon=CS/C\Pi$ — эксцентриситет, и замечая, что для рассматриваемого теперь движения $E=M=n(t-T)$, легко найдем

$$r=a(1-2\varepsilon\cos M+\varepsilon^2)^{1/2};\qquad \operatorname{tg} v=\frac{\sin M}{\cos M-\varepsilon},$$

откуда

$$\frac{r}{a}=1-\varepsilon\cos M+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2 M+\frac{1}{2}\varepsilon^3\cos M\sin^2 M+\ldots,$$
$$v=M+\varepsilon\sin M+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin 2M-\frac{1}{3}\varepsilon^3\sin M(1-4\cos^2 M)+\ldots$$

Сравнение этих формул с предыдущими показывает, что взяв $\varepsilon=2e$, мы представим изменение v с ошибкой порядка e^2, но в r ошибка будет порядка e; если же взять эксцентрик, для которого $\varepsilon=e$, то хорошо представятся радиусы-векторы, но представление угловой координаты будет неудовлетворительно.

§ 4. Динамические следствия законов Кеплера

Законы Кеплера существенно помогли Исааку Ньютону (1642—1727) завершить открытие основных законов динамики, начатое Галилеем (1564—1642), Декартом (1596—1650) и Гюйгенсом (1629—1695). Создание динамики позволило в свою очередь совсем по-новому подойти к вопросу о движении планет. Вместо смутных представлений о причине планетных движений, коренящейся в Солнце, которые руководили Коперником и, в гораздо более отчетливой форме, Кеплером, Ньютон смог изучить явление количественно и найти силу, производящую движение планеты.

Так как движение планеты не является прямолинейным и равномерным, то согласно закону инерции на планету действует некоторая сила. Чтобы найти эту силу или, что приводится к тому же, ускорение планеты, достаточно воспользоваться одним только первым законом Кеплера. Из этого закона прежде всего следует, что при всякой начальной скорости планеты ее траектория лежит в плоскости, проходящей через центр Солнца. Таким образом, если планета M (рис. 4) станет двигаться вокруг Солнца S по орбите MA, то действующее на нее ускорение должно находиться в плоскости SMA; если же планета станет двигаться по орбите MB, то ускорение должно находиться в плоскости SMB. Отсюда следует, что вектор ускорения $\boldsymbol{w}$, которое планета имеет в положении M, должен быть направлен по прямой SM. Так как ускорение направлено всегда в сторону вогнутости траектории, то $\boldsymbol{w}$ направлено в сторону Солнца. Иначе говоря, движение планеты происходит под действием центральной силы, направленной к центру Солнца.

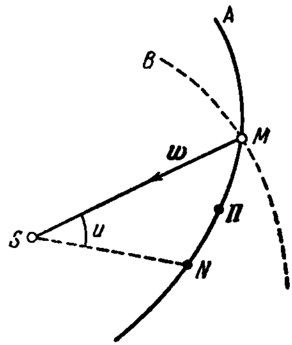

Рис. 4.

Обратимся теперь к нахождению величины ускорения. Положение планеты M (см. рис. 4) в плоскости ее орбиты SMA будем определять полярными координатами: полярным углом u, отсчитываемым от неподвижной прямой SN, и радиусом-вектором $r=SM$. Проекции ускорения на радиус-вектор и на перпендикулярный к нему вектор, направленный в сторону движения, выражаются, как известно, формулами

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{u}^2; \qquad w_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{u}). \tag{4.1}$$

В рассматриваемом случае, как мы только что видели,

$$w_r = -w; \qquad w_p = 0. \tag{4.2}$$

Поэтому

$$r^2\dot{u} = c, \tag{4.3}$$

где c — постоянная величина.

Поскольку стоящее слева выражение есть удвоенная секторная скорость, то равенство (4.3) выражает закон площадей. Отсюда видно, что второй закон Кеплера является с точки зрения динамики следствием первого закона.

Положив

$$s = r^{-1}$$

и представив равенство (4.3) в форме

$$\frac{du}{dt} = cs^2,$$

получим

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{du}{dt}\frac{d}{du}\left(\frac{du}{dt}\frac{dr}{du}\right) = cs^2\frac{d}{du}\left(cs^2\frac{ds^{-1}}{du}\right),$$

или

$$\ddot{r} = -c^2s^2\frac{d^2s}{du^2}.$$

Поэтому равенства (4.1) и (4.2) дают

$$w = c^2s^2\left(\frac{d^2s}{du^2} + s\right). \qquad (4.4)$$

Это выражение абсолютной величины ускорения материальной точки, движущейся под действием центральной силы, носит название формулы Бине.

Так как движение планеты происходит согласно первому закону Кеплера, т. е. по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце, то соотношение (3.8) дает

$$\frac{1}{s} = r = \frac{p}{1 + e\cos(u - \omega)}.$$

Через ω здесь обозначен полярный угол u, соответствующий перигелию П.

Подставив это выражение в формулу (4.4), получим

$$w = c^2p^{-1}r^{-2}.$$

Но

$$p = a(1 - e^2); \qquad c = 2\pi abP^{-1}, \qquad b = a\sqrt{1 - e^2},$$

где через P обозначен период обращения планеты. Следовательно,

$$w = \mu r^{-2}, \qquad (4.5)$$

где

$$\mu = 4\pi^2a^3P^{-2}. \qquad (4.6)$$

Итак, законы механики позволяют вывести из первого закона Кеплера такое заключение: движение каждой планеты происходит от действия на нее силы, направленной к центру Солнца и равной $m\mu r^{-2}$, где m — масса этой планеты, а μ определяется формулой (4.6).

Но согласно третьему закону Кеплера отношение a^3P^{-2} одинаково для всех планет. Следовательно, величина μ — одна и та же для всех планет; она характеризует силовое поле Солнца.

Примечание. Закон действия силы, выражаемый формулой (4.5), можно получить, используя только часть тех свойств движения, которые содержатся в первом законе Кеплера. Задачи такого рода были поставлены и решены Бертраном (J. Bertrand) в 1873 и 1877 годах. В частности, им была решена следующая задача:

Найти центральную силу, под действием которой материальная точка при всех начальных условиях движется по коническому сечению.

Оказывается, что этому условию удовлетворяют только две силы, не зависящие от направления: сила, определяемая формулой (4.5), и сила, прямо пропорциональная расстоянию r.

Можно показать, что тот же самый результат получается и в том случае, если отбросить условие, что искомая сила должна быть центральной. Эта более общая задача была решена Альфаном (G. Halphen) в 1877 г. и В. Г. Имшенецким в 1879 г.

Вопрос о значении такого рода задач для доказательства применимости закона всемирного тяготения за пределами солнечной системы будет рассмотрен в гл. XII.

§ 5. Закон Ньютона

Закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном в 1686 г., был опубликован в его знаменитом произведении Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, оказавшем исключительно большое влияние на дальнейшее развитие не только астрономии, но и всего естествознания *).

Ньютон опирался на законы Кеплера. Из этих законов следует, как было показано в предыдущем параграфе, что Солнце является центром силового поля, производящего в каждой точке пространства ускорение

$$w = \mu r^{-2}, \tag{5.1}$$

где r — расстояние этой точки от центра Солнца, а μ — некоторая постоянная величина.

Наблюдения показывают, что движения спутников вокруг планет происходят, по крайней мере в первом приближении, по законам Кеплера. Это позволяет считать, что планеты, имеющие спутников, являются центрами силовых полей, аналогичных силовому полю Солнца. Так, например, Юпитер является центром силового поля, у которого ускорение в каждой точке равно

$$w_1 = \mu_1 r^{-2}, \tag{5.2}$$

где r — расстояние этой точки от центра Юпитера, μ_1 — постоянная величина, отличная, как показывают наблюдения, от μ.

Обозначим через M и m_1 массы Солнца и Юпитера. В таком случае сила, с которой Солнце притягивает Юпитер, будет равна $m_1 \mu r^{-2}$, тогда как сила, с которой Юпитер притягивает Солнце, равна $M \mu_1 r^{-2}$. По закону равенства действия и

*) Перевод этого сочинения на русский язык, снабженный ценными примечаниями, был опубликован А. Н. Крыловым в 1911 г. и переиздан в 1936 г. (Собрание трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, 1936.)