в первом законе Кеплера. Задачи такого рода были поставлены и решены Бертраном (J. Bertrand) в 1873 и 1877 годах. В частности, им была решена следующая задача:

Найти центральную силу, под действием которой материальная точка при всех начальных условиях движется по коническому сечению.

Оказывается, что этому условию удовлетворяют только две силы, не зависящие от направления: сила, определяемая формулой (4.5), и сила, прямо пропорциональная расстоянию r.

Можно показать, что тот же самый результат получается и в том случае, если отбросить условие, что искомая сила должна быть центральной. Эта более общая задача была решена Альфаном (G. Halphen) в 1877 г. и В. Г. Имшенецким в 1879 г.

Вопрос о значении такого рода задач для доказательства применимости закона всемирного тяготения за пределами солнечной системы будет рассмотрен в гл. XII.

§ 5. Закон Ньютона

Закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном в 1686 г., был опубликован в его знаменитом произведении Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, оказавшем исключительно большое влияние на дальнейшее развитие не только астрономии, но и всего естествознания *).

Ньютон опирался на законы Кеплера. Из этих законов следует, как было показано в предыдущем параграфе, что Солнце является центром силового поля, производящего в каждой точке пространства ускорение

$$w = \mu r^{-2}, \tag{5.1}$$

где r — расстояние этой точки от центра Солнца, а μ — некоторая постоянная величина.

Наблюдения показывают, что движения спутников вокруг планет происходят, по крайней мере в первом приближении, по законам Кеплера. Это позволяет считать, что планеты, имеющие спутников, являются центрами силовых полей, аналогичных силовому полю Солнца. Так, например, Юпитер является центром силового поля, у которого ускорение в каждой точке равно

$$w_1 = \mu_1 r^{-2}, \tag{5.2}$$

где r — расстояние этой точки от центра Юпитера, μ_1 — постоянная величина, отличная, как показывают наблюдения, от μ.

Обозначим через M и m_1 массы Солнца и Юпитера. В таком случае сила, с которой Солнце притягивает Юпитер, будет равна $m_1\mu r^{-2}$, тогда как сила, с которой Юпитер притягивает Солнце, равна $M\mu_1 r^{-2}$. По закону равенства действия и

*) Перевод этого сочинения на русский язык, снабженный ценными примечаниями, был опубликован А. Н. Крыловым в 1911 г. и переиздан в 1936 г. (Собрание трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, 1936.)

противодействия эти две силы должны быть равны. Следовательно,

$$m_1\mu r^{-2} = M\mu_1 r^{-2},$$

откуда

$$\mu/M = \mu_1/m_1.$$

Если величину этого отношения, оказывающегося одинаковым для Солнца и для планет, имеющих спутников, обозначить через f, то получим $\mu = fM$, $\mu_1 = fm_1$, так что выражение (5.1) принимает вид

$$w = fMr^{-2}.$$

Отсюда следует, что два небесных тела, имеющие массы m_1 и m_2, притягивают друг друга с силой

$$F = fm_1m_2r^{-2}, \tag{5.3}$$

где r — расстояние между их центрами, а коэффициент f один и тот же для всех небесных тел.

Хотя формула (5.2) непосредственно доказывается лишь для планет, имеющих спутников, естественно предположить, что она имеет место и для остальных планет.

Установление закона (5.3), по которому происходит взаимодействие небесных тел, явилось первым этапом в рассуждениях Ньютона, приведших к открытию закона всемирного тяготения. Напомним, что этот первый этап заключался: в окончательном выяснении первых двух законов механики; в выводе при помощи этих законов из эмпирических законов Кеплера свойств силового поля Солнца; в открытии третьего закона механики и в выводе при его помощи формулы (5.3).

Существенную заслугу в деле получения формулы (5.1) сам Ньютон приписывает Гюйгенсу, который незадолго перед тем (1675) получил известную формулу для центростремительного ускорения при круговом движении. Применение этой формулы позволило нескольким современникам Ньютона установить, что движение планеты производится притяжением Солнца, изменяющимся обратно пропорционально квадрату расстояния. Но такой вывод относился лишь к фиктивному случаю строго кругового движения планеты. Ньютон поставил и решил задачу нахождения силы, производящей эллиптическое движение — задачу более общую и, при тогдашнем состоянии математики, гораздо более трудную.

Вторым этапом в рассуждениях Ньютона было отождествление силы, действующей между небесными телами, с силой тяжести. К этому отождествлению Ньютон пришел следующим образом. Наличие у Земли спутника, движение которого подчиняется (по крайней мере приближенно) первому закону Кеплера, показывает, что Земля является, подобно Солнцу и другим планетам,

центром силового поля, производящего ускорение, определяемое формулой (5.1). Стоящую в ней величину μ можно вычислить, если в выражение (4.6) подставить известные из наблюдений значения большой полуоси лунной орбиты и периода ее обращения. Взяв после этого r равным радиусу Земли, Ньютон нашел, что ускорение, производимое рассматриваемым силовым полем на поверхности Земли, равно 9,9 *м/сек*^{2} (в наших единицах).

С другой стороны, из опытов было известно, что ускорение силы тяжести равно 9,8 *м/сек*^{2}. Отличие этого значения от предыдущего достаточно мало́, так что Ньютон был вправе отнести его за счет неточности исходных данных и считать доказанным, что движение Луны, а следовательно, и других небесных тел, производится силой тяжести, хорошо нам известной из повседневного опыта. Этим была окончательно стерта та грань между «земным» и «небесным», разрушение которой было начато Коперником.

Сила тяжести доступна для экспериментального изучения. Такое изучение позволило еще Галилею установить, что ускорение, сообщаемое этой силой, не зависит от размеров тела: все тела падают при отсутствии посторонних сил с одинаковым ускорением. Отсюда следует, что сила тяжести, действующая на какое-либо тело, есть сумма сил, действующих на его частицы. Подобно этому и силы взаимного притяжения между небесными телами должны получаться от сложения сил, с которыми притягиваются их частицы.

Такого рода соображения привели Ньютона к формулировке, в качестве весьма обоснованной рабочей гипотезы, закона всемирного тяготения:

Каждые две частицы вещества притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Третий этап рассуждений состоял в доказательстве справедливости этого гипотетического закона. Такое доказательство, заключающееся в выводе следствий из этого закона и в установлении согласия этих следствий с наблюдениями, начатое Ньютоном, потребовало огромной работы, занявшей более двух столетий. Эта работа, важнейшие этапы которой будут вкратце описаны в следующей главе, превратила закон Ньютона из гипотезы в один из наиболее строго обоснованных законов природы.

Примечание. Чтобы строго доказать тождественность силы, производящей движение небесных светил, с силой тяжести, нужно проделать вычисления, значительно более сложные, нежели указанные выше вычисления Ньютона.

Для основного коэффициента формулы, дающей величину силы тяжести в точках поверхности земного сфероида, наблюдения дают значения, заключенные между 978,047 и 978,057 (в системе CGS). Но этот коэффициент равен

произведению $fm_0\rho_0^{-2}$ (где m_0 и ρ_0 — масса и экваториальный радиус Земли), умноженному на некоторую функцию сжатия α земного сфероида (гл. XXX, § 3). Таким образом, взяв вероятнейшие значения ρ_0 и α, из измерений силы тяжести, получаем

$$fm_0 = 3{,}9862 \times 10^{20}. \tag{5.4}$$

С другой стороны, ускорение силового поля, производящего движение Луны относительно Земли, выражается формулой (5.1) при $\mu = f(m_0+m_1)$, где m_1 — масса Луны. Чтобы вычислить эту величину, надо в формулу (4.6) подставить те значения a и P, которые имели бы место, если бы Луна двигалась только под действием взаимного притяжения между ней и Землей. Между тем получаемые из наблюдений значения

$$a = 3{,}84395 \times 10^{10}; \qquad P = 2{,}3605915 \times 10^6$$

включают еще и влияние Солнца.

Наиболее существенная часть этого влияния будет учтена (гл. XXI, § 3). если только что приведенное значение a (полученное из наблюдаемых значений параллакса Луны) умножить на 1,000913. Это дает

$$f(m_0 + m_1) = 4{,}0350 \times 10^{20}. \tag{5.5}$$

Коэффициент лунного неравенства в движении Земли, пропорциональный отношению масс Земли и Луны, дает $m_0 = 81{,}375\, m_1$. Умножив, соответственно с этим, величину (5.5) на 0,98786, окончательно получим

$$fm_0 = 3{,}9860 \times 10^{20},$$

что находится в полном согласии с величиной (5.4), выведенной из измерений силы тяжести.

§ 6. Доказательства закона тяготения, данные Ньютоном

Указанные в двух предыдущих параграфах рассуждения, приведшие к открытию закона тяготения, не могут считаться доказательством этого закона хотя бы уже потому, что их отправным пунктом являются законы Кеплера, выполняющиеся лишь приближенно. Эти рассуждения являются лишь обоснованием выдвижения закона тяготения в качестве рабочей гипотезы. Чтобы доказать этот закон, нужно вывести из него все следствия, поддающиеся опытной проверке, и сравнить их с результатами измерений. Этим путем и пошел Ньютон.

Он начал с изучения движения небесных тел, вытекающего из закона тяготения. Эту задачу он упростил, показав, что каждое небесное тело можно при этом заменить материальной точкой, считая его массу сосредоточенной в центре инерции. Таким образом, вопрос привелся к решению задачи о движении произвольного числа материальных точек, притягивающих друг друга по закону Ньютона. Так возникла знаменитая «задача n тел».

Простейший случай, когда $n=2$, т. е. «задачу двух тел», Ньютон решил с достаточной полнотой. Это дало ему возможность найти законы, по которым двигалась бы каждая планета,