произведению $fm_0\rho_0^{-2}$ (где m_0 и ρ_0 — масса и экваториальный радиус Земли), умноженному на некоторую функцию сжатия α земного сфероида (гл. XXX, § 3). Таким образом, взяв вероятнейшие значения ρ_0 и α, из измерений силы тяжести, получаем

$$fm_0 = 3{,}9862 \times 10^{20}. \tag{5.4}$$

С другой стороны, ускорение силового поля, производящего движение Луны относительно Земли, выражается формулой (5.1) при $\mu = f(m_0+m_1)$, где m_1 — масса Луны. Чтобы вычислить эту величину, надо в формулу (4.6) подставить те значения a и P, которые имели бы место, если бы Луна двигалась только под действием взаимного притяжения между ней и Землей. Между тем получаемые из наблюдений значения

$$a = 3{,}84395 \times 10^{10}; \quad P = 2{,}3605915 \times 10^{6}$$

включают еще и влияние Солнца.

Наиболее существенная часть этого влияния будет учтена (гл. XXI, § 3). если только что приведенное значение a (полученное из наблюдаемых значений параллакса Луны) умножить на 1,000913. Это дает

$$f(m_0 + m_1) = 4{,}0350 \times 10^{20}. \tag{5.5}$$

Коэффициент лунного неравенства в движении Земли, пропорциональный отношению масс Земли и Луны, дает $m_0 = 81{,}375\, m_1$. Умножив, соответственно с этим, величину (5.5) на 0,98786, окончательно получим

$$fm_0 = 3{,}9860 \times 10^{20},$$

что находится в полном согласии с величиной (5.4), выведенной из измерений силы тяжести.

§ 6. Доказательства закона тяготения, данные Ньютоном

Указанные в двух предыдущих параграфах рассуждения, приведшие к открытию закона тяготения, не могут считаться доказательством этого закона хотя бы уже потому, что их отправным пунктом являются законы Кеплера, выполняющиеся лишь приближенно. Эти рассуждения являются лишь обоснованием выдвижения закона тяготения в качестве рабочей гипотезы. Чтобы доказать этот закон, нужно вывести из него все следствия, поддающиеся опытной проверке, и сравнить их с результатами измерений. Этим путем и пошел Ньютон.

Он начал с изучения движения небесных тел, вытекающего из закона тяготения. Эту задачу он упростил, показав, что каждое небесное тело можно при этом заменить материальной точкой, считая его массу сосредоточенной в центре инерции. Таким образом, вопрос привелся к решению задачи о движении произвольного числа материальных точек, притягивающих друг друга по закону Ньютона. Так возникла знаменитая «задача n тел».

Простейший случай, когда $n=2$, т. е. «задачу двух тел», Ньютон решил с достаточной полнотой. Это дало ему возможность найти законы, по которым двигалась бы каждая планета, если бы она не испытывала притяжения со стороны других планет. Оказалось, что в этом случае первые два закона Кеплера выполнялись бы совершенно точно. Что же касается третьего закона, то он должен быть изменен: одно и то же значение для каждой планеты имеет не величина P^2/a^3, рассматривавшаяся Кеплером, а величина

$$(1+m/M)P^2/a^3, \tag{6.1}$$

где через M и m обозначены масса Солнца и масса рассматриваемой планеты.

В новой, исправленной таким образом формулировке третий закон Кеплера позволил найти массы Юпитера и Сатурна. Это дало возможность убедиться, что величина (6.1) действительно имеет одно и то же значение для всех планет, по крайней мере в пределах точности наблюдений того времени.

Ньютон показал также, что в задаче двух тел возможны движения не только по эллипсу, но и по другим коническим сечениям. Это позволило ему, впервые в истории науки, правильно объяснить движение комет. Он показал, что комета 1680 г., так привлекшая к себе внимание своей исключительной величиной и яркостью, двигалась по параболе. Разработанный Ньютоном способ нахождения параболических орбит позволил Галлею (E. Halley, 1656—1742) показать, что все кометы, для которых имелись достаточно точные наблюдения, также двигались по коническим сечениям *).

Следующий этап проделанной Ньютоном работы заключался в доказательстве того, что из формулированного им закона вытекают не только законы Кеплера, но и все наблюдаемые отступления от этих законов.

Самые большие отступления имеют место в движении Луны. Еще в древности было известно, что плоскость ее орбиты не остается неподвижной: восходящий узел имеет попятное движение со средней скоростью 19°21′ в год, на которое накладывается периодическое колебание с амплитудой, равной 1°26′; наклон плоскости орбиты к плоскости эклиптики колеблется между 5°0′ и 5°18′, сохраняя постоянную среднюю величину. С другой стороны, эллиптическая орбита Луны вращается в своей плоскости так, что перигей движется со средней скоростью 40°41′ в год,

*) Галлей вычислил параболические орбиты для 24 комет. Заметив очень большое сходство орбит комет 1305, 1380, 1456, 1531, 1607 и 1682 годов, он высказал предположение, что эти кометы являются повторными возвращениями одной и той же кометы, движущейся по вытянутой эллиптической орбите и имеющей период обращения в 75 лет. Когда предсказанное им на 1758 год возвращение этой кометы (получившей название «кометы Галлея») подтвердилось, то это явилось одним из наиболее общедоступных доказательств справедливости закона всемирного тяготения.

а на это поступательное движение перигея накладывается еще его периодическое колебание с амплитудой, доходящей до 8°41′. Наконец, движение в орбите отличается от вычисленного по закону площадей на ряд периодических неравенств, наибольшими из которых являются эвекция с амплитудой в 1°16′26″, вариация с амплитудой в 39′30″ и годичное неравенство — с амплитудой в 11′10″.

Ньютон показал, что все эти отступления от законов Кеплера, характеризующих движение в задаче двух тел, объясняются притяжением Солнца. Изучение движения Луны является, таким образом, даже в первом приближении уже не задачей двух тел, а задачей трех тел. Преодолев весьма значительные по тому времени математические трудности, Ньютон нашел некоторые свойства движения в том частном случае задачи трех тел, когда одно из расстояний между телами очень мало́ по сравнению с двумя другими. Это дало ему возможность показать, что вариация является следствием закона всемирного тяготения, и найти теоретическую величину ее амплитуды (35′10″), достаточно близкую к наблюдаемой. Таким же следствием закона тяготения оказалось и движение линии узлов: теоретическая величина среднего движения узла, полученная Ньютоном (19°18′), была очень близка к указанной выше величине, полученной из наблюдений. Для амплитуды периодического колебания узла Ньютон получил 1°30′, также в прекрасном согласии с наблюдениями. Колебание наклона лунной орбиты тоже оказалось следствием притяжения Солнца, а теоретическая величина амплитуды этого колебания, равная 17′45″, оказалась в полном согласии с наблюдениями.

Подробное изложение теории вариации и теории движения плоскости лунной орбиты Ньютон заканчивает словами: «Этими расчетами движений Луны я хотел показать, что на основании теории тяготения движения Луны могут быть вычислены по причинам их производящим». Затем он указывает, не входя в подробности, что теория тяготения объясняет годичное неравенство и дает для него амплитуду, равную 11′50″; что должно существовать полугодичное неравенство с амплитудой в 3′45″ (тогда еще не открытое наблюдениями); что из теории тяготения вытекает поступательное движение перигея *).

*) Относительно теоретического значения средней скорости движения перигея в Principia имеется только следующий расчет. Если к силе притяжения, действующей между Землей и Луной, прибавить так называемую постоянную часть возмущающей силы Солнца (величина которой в среднем в 357 раз меньше притяжения Земли), то для средней скорости движения перигея получается величина приблизительно вдвое меньшая наблюдаемой.

Получение более точной величины этой скорости представляет несравненно более сложную задачу, занимавшую Ньютона до конца жизни. Остав-

Таковы основные результаты, полученные Ньютоном в теории движения материальных точек, притягивающих друг друга по найденному им закону. Не меньшее значение для установления этого закона имели сделанные Ньютоном выводы из него в отношении притяжения протяженных тел. Эти выводы заложили основы новой дисциплины — теории притяжения, из которой впоследствии развился один из важнейших разделов математической физики — теория потенциала.

Ньютон начинает с нахождения притяжения, производимого бесконечно тонкой однородной сферической оболочкой на внутреннюю и на внешнюю точки. Это дало ему возможность показать, что тело сферической структуры притягивает внешнюю точку так, как если бы его масса была сосредоточена в центре (см. гл. XX, § 5). Изучение притяжения, производимого однородным телом вращения на точку, лежащую на оси вращения, позволило, далее, сравнить притяжение, производимое эллипсоидом вращения в точке, лежащей на его полюсе, и в точке, лежащей на экваторе. А это в свою очередь дало Ньютону возможность сделать новый, весьма важный шаг в деле выяснения фигуры Земли.

До Ньютона строго сферическая форма Земли была общепринятой научной истиной — задача заключалась лишь в возможно точном нахождении радиуса Земли. Ньютон показал, что необходимым следствием закона тяготения является «фигура Земли, не вполне сферическая, а образуемая вращением эллипса около его малой оси». В самом деле, «если бы у планеты было устранено суточное вращение, то вследствие одинакового отовсюду тяготения частей ее она должна бы принять форму шара. Вследствие же вращения части близ экватора стремятся удалиться от оси; следовательно, если бы вещество было жидким, то оно своим подъемом увеличило бы диаметр экватора и своим опусканием уменьшило бы ось, проходящую через полюса. Так, диаметр Юпитера (согласно наблюдениям астрономов) оказывается меньшим между полюсами, нежели с востока на запад».

В основу теории фигуры Земли Ньютон кладет предположение, что Земля ограничена уровенной поверхностью, т. е. такой, во всех точках которой сила тяжести одинакова, причем под силой тяжести разумеется равнодействующая силы притяжения и центробежной силы. Таким образом, теория фигуры Земли

шиеся после его смерти рукописи, опубликованные лишь в 1888 г., показали, что ему удалось достичь гораздо большей точности в решении задачи о движении перигея Луны. Для средней скорости этого движения он получил теоретическую величину, равную 38°51′51″ в год вместо действительной 40°41′.

Весьма подробный разбор всех работ Ньютона, как опубликованных им, так и найденных в его бумагах, содержит книга: W. W. Rouse Ball, An Essay on Newton's Principia, London, 1893.

Ньютона базируется, как и современная теория, на законе тяготения и на условиях гидростатического равновесия. Однако в столь общем виде задача о нахождении фигуры планеты не решена и по настоящее время. Ньютон решал ее, делая еще два дополнительных предположения: что планета однородна и что ее внешняя поверхность есть эллипсоид вращения с очень малым сжатием. Это второе предположение приводит задачу к нахождению зависимости между сжатием эллипсоида и угловой скоростью вращения планеты. Ньютон нашел, пренебрегая второй степенью сжатия α, что

$$\alpha = \frac{5}{4} q,$$

где q есть отношение центробежной силы к силе притяжения в точке, лежащей на экваторе планеты.

Для Земли $q = 1/288$, что дает $\alpha = 1/230$. Такова теоретическая величина сжатия, полученная Ньютоном на основании только что указанных предположений. Эти выводы имели весьма важное значение для признания закона всемирного тяготения. Ньютон показал хорошее согласие их с известными тогда наблюдениями силы тяжести под разными широтами. Но вывод Ньютона относительно сжатой у полюсов формы Земли противоречил результатам геодезических работ того времени. Обширные измерения, выполненные во Франции как раз в это время (1683—1718), дали для 1° меридиана на юге Франции 57097 туазов, а на севере — 56960 туазов, что указывало (если бы эти результаты были достаточно точны) на продолговатую, а не сплюснутую форму Земли. Так как это кажущееся расхождение следствий из закона тяготения с действительностью было, в сущности, единственным научным доводом против этого закона (остальные возражения носили философский характер), то на нем особенно настаивали французские ученые, до 30-х годов XVIII в. остававшиеся приверженцами картезианской физики, объяснявшей и тяжесть, и движение светил эфирными вихрями.

Чтобы окончательно решить вопрос, приобретший, таким образом, большое принципиальное значение, французским правительством были снаряжены две экспедиции. Одна из них измерила (1735—1742) дугу в 3°8′ в Перу и нашла, что вблизи экватора величина 1° меридиана равна 56734 туазам; другая экспедиция, работавшая в Лапландии, нашла (1736—1737), что под широтой 66°20′ длина 1° меридиана равна 57438 туазам. Этим была окончательно доказана сжатая форма Земли. Заметим, что достаточно точную величину сжатия удалось получить из геодезических измерений гораздо позднее — только в начале XIX в. Она оказалась в полном согласии с законом всемирного тяготения.

Полученная Ньютоном величина сжатия, равная $5q/4$, основана на допущении однородности Земли. Он ошибочно считал, что для планеты, плотность которой возрастает к центру, сжатие должно быть больше этой величины. В 1690 г. Гюйгенсом была опубликована работа «О причине силы тяжести», в которой он получил теоретическую фигуру планеты, исходя из картезианских (хотя и сильно им измененных) представлений о природе силы тяжести. Отрицая ньютоново притяжение между каждой парой материальных частиц, Гюйгенс полагал, что из теории эфирных вихрей вытекает стремление каждой частицы планеты к ее центру. Он показал, что, каков бы ни был закон изменения силы этого притяжения с расстоянием от центра, сжатие планеты будет равно $q/2$. Таким образом, сжатие Земли по Гюйгенсу должно было бы равняться 1/576.

С точки зрения ньютоновой теории тяготения полученный Гюйгенсом результат дает сжатие планеты для того случая, когда планета настолько уплотнена к центру, что вся ее притягивающая масса может считаться сосредоточенной в центре.

Современная теория фигур планет в своих наиболее существенных частях была создана Клеро (A. Clairaut, 1713—1765) в его книге «Теория фигуры Земли, основанная на принципах гидростатики», вышедшей в 1743 г. *). Здесь было показано, что каков бы ни был у планеты закон возрастания плотности с глубиной, ее сжатие всегда будет заключаться между величинами $5q/4$ и $q/2$, найденными Ньютоном и Гюйгенсом. Это является необходимым следствием закона всемирного тяготения и основных принципов гидростатики.

Установив истинную форму Земли, Ньютон смог сделать еще одно открытие чрезвычайной важности: он показал, что прецессионное движение точки весеннего равноденствия, открытое еще Гиппархом, также является необходимым следствием закона всемирного тяготения, причем величина прецессии, рассчитанная на основании этого закона, удовлетворительно согласуется с получаемой из наблюдений.

Для вычисления величины прецессии Ньютон представил себе Землю состоящей из однородного шара и кольца, расположенного вдоль экватора. Рассматривая это кольцо как «кольцо лун» и найдя попятное движение узлов этих лун, Ньютон получил для величины лунно-солнечной прецессии 68″ в год. Лапласом было отмечено, что расхождение этой величины с наблюдаемой зависит прежде всего от принятого Ньютоном значения сжатия 1/230, значительно превосходящего действительную величину. Для сжатия, равного 1/300, вычисления Ньютона дали

---

*) Русский перевод этой книги издан Академией наук СССР в серии «Классики науки» (1947).

бы прецессию, равную 53″,6, что весьма близко, принимая во внимание грубость расчета, к действительной величине 50″,4.

Последним, но не менее важным доводом, выдвинутым Ньютоном в подтверждение закона всемирного тяготения, было вытекающее из этого закона объяснение приливов. Связь между приливными изменениями уровня океана и движением Луны была замечена давно. Но единственная, в сущности, попытка объяснить эту связь, сделанная Декартом и его последователями, не имела никакого научного значения *). Только Ньютон, опираясь на открытые им законы динамики и закон всемирного тяготения, смог объяснить причину приливов: он дал первые основы теории, устанавливающей связь между распространением приливной волны по земной поверхности и движениями Луны и Солнца.

Теорию приливов Ньютон строит на ряде упрощающих предположений. Он принимает Землю за однородное жидкое тело, имеющее под действием притяжения Луны форму вытянутого эллипсоида вращения, полярная ось которого направлена к Луне. При нахождении фигуры этого эллипсоида он кладет в основу принцип статической теории приливов: в каждый момент времени для каждой частицы Земли должно существовать равновесие между приливообразующей силой и силой, с которой вся масса жидкости притягивает эту частицу.

Изучив таким путем в отдельности лунные и солнечные приливы и сложив их, Ньютон получил движение всей приливной волны по поверхности Земли. Полученные им результаты качественно согласовались с наблюдениями достаточно хорошо, но не могли служить основой для сколько-нибудь точных расчетов.

Через 100 лет после появления Principia Лаплас начал создание динамической теории приливов, основанной на уравнениях гидродинамики. Эта теория гораздо полнее представляет наблюдаемые явления, нежели статическая теория; ее лимитируют в этом отношении только трудности учета влияния конфигурации берегов и морского дна.

---

*) Декарт объяснял приливы давлением на океаны того вихря, который, согласно его взглядам, сопровождает движенне Луны.