ГЛАВА II

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

§ 1. Создание гравитационной теории движения Луны

Следствия, выведенные Ньютоном из закона всемирного тяготения, достаточно убедительно показывали, что этот закон близок к истине. Но поскольку эти следствия имели приближенный, а в некоторых случаях лишь качественный характер, они не могли рассматриваться как строгое доказательство закона тяготения. Оставался открытым вопрос, является ли закон, сформулированный Ньютоном, точным законом или только приближенным, подлежащим дальнейшему улучшению.

Для решения этого вопроса было необходимо вывести следствия из закона тяготения не грубо приближенно, как это было сделано самим Ньютоном, а со всею точностью, соответствующей точности наблюдений. Эта проблема, ставшая в начале XVIII в. одной из центральных проблем всего естествознания, получила достаточно удовлетворительное решение только после двухсотлетней напряженной работы. В течение всего этого периода успехи в разрешении ее были неразрывно связаны с развитием математического анализа, прежде всего — теории дифференциальных уравнений, и в свою очередь стимулировали это развитие.

Геометрический метод, которым были получены результаты, содержащиеся в Principia, не мог служить для более глубокого изучения движений небесных тел. Приоритет в деле использования для этой цели только что оформившегося анализа бесконечно малых принадлежит Клеро, Даламберу (1717—1783) и Леонарду Эйлеру (1707—1783), которые почти одновременно (в 1743—1747 гг.) и независимо один от другого дали дифференциальные уравнения, определяющие движения трех небесных тел под действием их взаимного тяготения, и наметили пути для приближенного решения этих уравнений. Таким образом было положено начало длинному ряду работ, важнейшие из которых, представляющие не только исторический интерес, будут указаны в следующих главах. Сейчас отметим лишь общий характер полученных результатов.

Рассмотрим прежде всего теорию движения Луны. Две причины делали создание возможно точной теории движения Луны весьма актуальной проблемой науки того времени.

Такая теория была нужна для решения практической задачи первостепенной важности — задачи нахождения долгот на море. Наиболее точным способом нахождения географической долготы какого-либо места был в то время «способ лунных расстояний», предложенный еще в 1514 г. Джоном Вернером. Он заключался в сравнении наблюденного в этом месте положения Луны, выведенного из измерений ее расстояний от нескольких ярких звезд и отнесенного к местному времени, с положениями Луны, соответствующими моментам времени основного меридиана. Такое сравнение давало возможность найти разность местного времени и времени основного меридиана в один и тот же физический момент, т. е. долготу места. Но чтобы применять этот способ на море, необходимо иметь вычисленную заранее достаточно точную эфемериду Луны.

Только открытие закона тяготения дало надежду построить теорию движения Луны, позволяющую предвычислять ее положения с нужной точностью. Отсюда те многочисленные премии за усовершенствование теории движения Луны, которые предлагались в первой половине XVIII в. адмиралтействами и академиями наук различных стран.

С другой стороны, теория движения Луны была наиболее чувствительным критерием для решения вопроса о том, является ли закон Ньютона точным законом природы, или только приближенным.

Применение аналитических методов к изучению движения Луны начинается мемуаром Клеро «Об орбите Луны в системе мира Ньютона» (1743), в котором из дифференциальных уравнений движения были выведены полученные Ньютоном результаты относительно вариации и движения узлов. Очередной и наиболее важной задачей Клеро правильно считал исследование новыми, мощными методами того неравенства, «которое получило у Ньютона наиболее темное развитие, а именно, движения лунного перигея». Однако, когда полученный им результат оказался таким же, как у Ньютона, т. е. для движения перигея получилась величина, почти вдвое меньшая наблюдаемой, Клеро решил, что закон тяготения должен быть изменен. Он предложил (1747) для напряжения силового поля, производимого точечной массой M, вместо выражения $w = \frac{fM}{r^2}$, соответствующего закону Ньютона, взять одно из выражений

$$w = fMr^{-2} + \alpha Mr^{-3}$$

или

$$w = fMr^{-2} + \beta Mr^{-4}.$$

Если коэффициент α или β взять достаточно малым, то для расстояний, имеющих место между планетами и Солнцем, взаимодействие между телами не будет отличаться от определяемого законом Ньютона; но для очень малых расстояний (расстояние Луны от Земли на два порядка меньше) вторые члены указанных выражений дадут дополнительное вращение линии апсид.

К аналогичным результатам одновременно с Клеро пришел несколько иным путем Даламбер. Но возникшие таким образом сомнения в точности закона Ньютона продолжались недолго. В 1749 г. Клеро показал, что причиной расхождений с наблюдениями является не ошибочность закона Ньютона, а недостаточность первого приближения. Когда ему удалось выполнить второе приближение, то для годичного движения лунного перигея он получил 34°22′, что было гораздо ближе к получаемой из наблюдений величине 40°41′, нежели результат первого приближения, равный 20°12′.

Устранение этой трудности не только рассеяло сомнения в точности закона Ньютона, но и открыло путь к построению полной гравитационной теории движения Луны, охватывающей все ее неравенства. Первые попытки решения этой задачи, предложенной Петербургской Академией на соискание премии, мы находим в трех сочинениях, появившихся почти одновременно.

В сочинении Клеро [1752] с гордым названием «Теория Луны, выведенная из одного только принципа притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний», премированного и изданного Петербургской Академией наук, дифференциальные уравнения движения Луны решаются с полным учетом первой степени возмущающей силы Солнца, а частично — с учетом второй степени. За независимое переменное Клеро берет долготу Луны в орбите, а за неизвестные величины время, обратную величину радиуса-вектора, долготу узла и наклон лунной орбиты. Исходным приближением служит вращающийся эллипс, определяемый уравнением

$$p/r = 1 + e \cos cv,$$

где постоянная c характеризует движение перигея.

Теория, почти одновременно развитая Даламбером [1754], была основана на тех же дифференциальных уравнениях. Но в то время как Клеро ограничился лишь численным решением для взятых из наблюдений значений параметров, Даламбер дал буквенное и притом несколько более полное решение. Эта работа была представлена Парижской Академии в январе 1751 г.

В 1753 г. Петербургской Академией было издано сочинение Эйлера с длинным названием: «Теория движения Луны, выявляющая все ее неравенства. В Прибавлении дается другая трактовка того же вопроса и показывается, каким образом движение Луны со всеми ее бесчисленными неравенствами этим другим путем может быть представлено и подчинено вычислениям» [Эйлер, 1753].

В основной части этого сочинения Эйлер исходит из уравнений движения Луны в цилиндрических координатах и развивает ту теорию, которая получила впоследствии название «первой лунной теории Эйлера». Метод, данный им в Прибавлении (Additamentum), является первоначальной формой метода вариации элементов.

Конечно, теория Эйлера, так же как и теория Клеро, не могла представить движение Луны с точностью, сравнимой с точностью наблюдений. Но она имела, тем не менее, большое практическое значение. Геттингенский астроном Майер (Tobias Mayer, 1723—1762), взяв из этой теории только форму лунных неравенств и найдя их коэффициенты из большого числа наблюдений, построил таблицы, которые воспроизводили движение Луны с невиданной еще точностью. Даваемое ими положение Луны не расходилось с наблюдениями больше чем на 1′,5, а в большинстве случаев расхождения не превышали одной минуты. (Это соответствовало ошибке в полградуса при нахождении долготы места способом лунных расстояний.)

Таблицы Т. Майера долго (до 1823 г.) служили для вычисления эфемерид Луны, даваемых в астрономических ежегодниках. Они были изданы Британским адмиралтейством в 1755 г. и (в переработанном виде) в 1770 г. Будучи полуэмпирическими, эти таблицы нуждались в частых исправлениях при помощи дальнейших наблюдений. Такие исправленные таблицы были опубликованы в 1787 г. (С. Mason), 1806 г. (J. T. Burg) и 1812 г. (J. K. Burckhardt).

Через 20 лет Эйлер, не перестававший усердно работать над усовершенствованием теории движения Луны, опубликовал обширный трактат «Теория движения Луны, трактованная новым методом, вместе с астрономическими таблицами, из которых положения Луны для любого времени легко могут быть получены, созданная под руководством Леонарда Эйлера неимоверным усердием и неутомимыми трудами трех академиков: И.-А. Эйлера, В. Л. Крафта, И.-А. Лекселя» [Эйлер, 1772].

Можно отметить, что этот труд, вычисления для которого выполнялись под руководством Эйлера тремя академиками, является в истории теоретической астрономии первым примером большой коллективной работы.

Здесь Эйлером был развит совершенно новый метод, имевший огромное значение для дальнейшего развития как теоретической астрономии, так и теории нелинейных колебаний в механике и теории дифференциальных уравнений в математике.

Все значение идей, положенных в основу этой так называемой «второй лунной теории Эйлера», было понято лишь в конце XIX в. Одной из важнейших причин того, что она не привлекла внимание современников Эйлера и была вскоре забыта, была ее малая практическая значимость. Несмотря на большой прогресс, достигнутый Эйлером в вычислении теоретических значений коэффициентов неравенств, он все же не смог получить их с нужной для практики точностью. Поэтому его таблицы давали положение Луны с бо́льшими ошибками, чем значительно более простые полуэмпирические таблицы Майера.

Большое значение в истории науки имела лунная теория Лапласа, созданная им в 1772—1802 гг. и изложенная в окончательной форме в третьем томе его «Небесной механики» [Лаплас, 1802]. В своей основе она явилась дальнейшим развитием теорий Клеро и Даламбера, выполненным с большим искусством и доведенным до значительно большей степени точности.

Весьма важным достижением Лапласа было объяснение векового ускорения среднего движения Луны. Это ускорение было открыто Галлеем еще в 1693 г. при попытке использовать для нахождения среднего движения Луны наблюдения затмений, сделанные в древности и в средние века. Оказалось, что среднее движение Луны с течением времени увеличивается. Несмотря на премии, предлагавшиеся различными академиями наук за выяснение причины этого явления, которое, казалось бы, никак не вытекало из закона тяготения, оно очень долго не поддавалось объяснению. Лаплас сначала безуспешно пытался объяснить вековое ускорение гипотезой конечной скорости распространения силы тяготения. Истинная причина была открыта им в 1787 г., когда он показал, что вековое ускорение движения Луны является необходимым следствием векового уменьшения эксцентриситета земной орбиты, производимого возмущениями планет. Теоретическая величина ускорения, найденная Лапласом ($11'',1$, затем $10'',2$), оказалась в полном согласии с тем, что давали наблюдения. Он показал также, что эта же самая причина производит ускорения в движении перигея и в движении узла лунной орбиты, что было подтверждено наблюдениями.

Дальнейшее развитие теория Лапласа получила в работах Дамуазо и Плана.

Теорию движения Луны, близкую по своим основным принципам к теории Лапласа, но отличающуюся от нее тем, что за независимую переменную с самого начала принимается время, построили Лаббок [1834] и Понтекулан [1846]. Особенно подробно эту теорию развил Понтекулан, тогда как Лаббок ограничился лишь начальными приближениями.

В теории Лапласа независимой переменной служит истинная долгота Луны; это несколько упрощает построение теории, но требует для получения координат в функции времени выполнения сложных и очень трудоемких преобразований рядов.

В Additamentum к своей первой теории движения Луны Эйлер сделал попытку, как было указано выше, развить эту теорию методом вариации элементов. Но он скоро убедился, что этот метод, столь выгодный для изучения движения планет, практически непригоден для построения теории движения Луны, так как требует невыполнимого количества приближений. Новая попытка в этом направлении была сделана Пуассоном (1781—1840). Предложенный им метод [Пуассон, 1835] заключается в учете вековых изменений долготы узла, долготы перигея и средней долготы эпохи начиная уже с первого приближения (см. § 15, гл. XVI). Однако и в такой форме метод не может служить для создания полной теории движения Луны. Но он может быть полезен для изучения некоторых классов возмущений; прежде всего — долгопериодических и вековых возмущений, производимых притяжением планет. Представляет также интерес особая форма, в которой метод Пуассона был представлен Пюизё [1864].

Итак, метод вариации элементов ни в своей первоначальной форме, ведущей начало от Эйлера, ни с теми сравнительно неглубокими изменениями, которые были внесены Пуассоном, не мог служить для эффективного нахождения огромных возмущений, производимых Солнцем в движении Луны. Чтобы сделать этот путь пригодным для изучения столь трудных случаев возмущенного движения, нужно было существенно новое и гораздо более глубокое развитие идей, лежащих в его основе.

Эта задача была разрешена замечательным методом интегрирования уравнений возмущенного движения, развитым Делоне (1816—1872). Применив свой метод к теории движения Луны, Делоне впервые смог построить чисто алгебраическую (с буквенными параметрами) и притом весьма полную теорию солнечных неравенств в ее движении. Ценою двадцатилетней работы он получил общие выражения для всех неравенств до 7-го порядка включительно относительно возмущающих сил [Делоне, 1867].

Теория Делоне, усовершенствованная в работах Радо (R. Radau, 1835—1911) и Андуайе (H. Andoyer, 1862—1929), легла в основу весьма точных таблиц движения Луны, построенных под руководством Радо [1911]. Эфемериды Луны, вычисленные по этим таблицам, публиковались с 1915 по 1925 г. во французском астрономическом ежегоднике.

В истории создания гравитационной теории движения Луны и построения точных таблиц выдающееся место занимают работы Ганзена (1795—1874). Ганзен начал с опубликования [1838] краткого изложения новой разработанной им теории. Потом были изданы [1857] основанные на ней таблицы. Окончательная форма его теории, существенно улучшенной в процессе составления таблиц, была дана значительно позднее [Ганзен, 1862—1864].

Наиболее существенное отличие этой теории от других заключалось в особом способе получения возмущенной долготы Луны. Ганзен вычисляет ее по формулам невозмущенного движения, но при помощи возмущенной средней аномалии. Вычисление возмущений в средней аномалии оказалось значительно более коротким, нежели непосредственное вычисление возмущений в долготе.

Созданные Ганзеном таблицы были первыми, претендовавшими на представление координат Луны гравитационной теорией с точностью, вполне сравнимой с точностью наблюдений. Действительно, наблюдения с 1750 по 1850 г. представлялись этими таблицами с ошибками, не превосходящими ошибок наблюдений. Казалось, что задача создания гравитационной теории движения Луны наконец полностью решена. Эфемериды Луны во всех астрономических ежегодниках стали вычисляться по таблицам Ганзена.

Но если с 1850 по 1860 г. наблюдения представлялись с ошибками, не превосходящими 2″, то в 1870 г. ошибки таблиц Ганзена достигли уже 5″, в 1880 г. они были порядка 10″, а в 1889 г. дошли до 18″.

В результате обширных работ, выполненных в Бюро Американского астрономического ежегодника С. Ньюкомом (S. Newcomb, 1835—1909), выяснилось (1878), что таблицы Ганзена не дают удовлетворительного представления и наблюдений, сделанных до 1750 г. Его исследования дали следующие поправки к долготе Луны, вычисленной по таблицам Ганзена:

—687 г. . .	—11′ ± 4′	1625 г. . . .	+50″ ± 13″	1775 г. . .	0″ ± 1
—381 » . .	—27 ± 5	1650 » . . .	+39 ± 5	1800 » . .	0 ± 1″
—189 » . .	—20 ± 3	1675 » . . .	+32 ± 1	1825 » . .	0 ± 1
—134 » . .	—16 ± 4	1700 » . . .	+21 ± 1	1850 » . .	0 ± 1
		1725 » . . .	+7 ± 1	1875 » . .	—8 ± 1
		1750 » . . .	0 ± 1		

Для выяснения причин этих расхождений прежде всего нужно было проверить найденные Ганзеном солнечные неравенства. Такая проверка была произведена путем сравнения его теории с теорией Делоне, построенной на совершенно иных принципах. Это сравнение, произведенное двумя различными способами Ньюкомом (1880) и Коуэллом (1904), показало, что в солнечных неравенствах у Ганзена нет неточностей, которые могли бы объяснить расхождения его таблиц с наблюдениями.

Но в отношении возмущений Луны, зависящих от прямого или косвенного действия планет, Ньюком установил, помимо мелких неточностей, два существенных отклонения теории Ганзена от чисто гравитационной теории. Во-первых, Ганзен принял в своих таблицах вековое ускорение Луны равным 12″,18, между тем чисто гравитационное значение этой величины равно 6″,11, как это было уже установлено двумя совершенно различными методами Адамсом (1853) и Делоне (1862). Во-вторых, в таблицах Ганзена среди долгопериодических членов, выражающих планетные возмущения, имелся член с амплитудой 21″,47 и с периодом в 239 лет; однако при проверке оказалось, что амплитуда этого члена в действительности равна только 0″,27.

Внесение этих исправлений полностью разрушило то замечательное согласие с наблюдениями, которое создало такой авторитет теории Ганзена, и вскрыло ряд весьма важных особенностей движения Луны. Прежде всего, было окончательно доказано, что выводимая из наблюдений величина векового ускорения Луны, равная по новейшим данным 11″,23±0″,30, существенно отличается от теоретической величины 6″,01±0″,02, не вызывающей в настоящее время никаких сомнений. Причина этого расхождения заключается, как теперь установлено, в замедлении вращения Земли, вызываемом приливным трением. Такое объяснение, на возможность которого указывал еще Лаплас, было поставлено вне сомнения подсчетом трения приливных волн в мелких морях, выполненным за последние десятилетия. Конечно, подобные подсчеты не могут быть сделаны с большой точностью. Поэтому в теории движения Луны приходится пользоваться значением векового ускорения, выведенным непосредственно из наблюдений, а не из гравитационной теории.

Не менее важные последствия имело практически полное удаление долгопериодического члена с амплитудой в 21″,47, ошибочно включенного Ганзеном в теорию движения Луны. Ньюком показал, что без этого члена представление наблюдений становится совершенно неудовлетворительным: погрешности вычисленных долгот для интервала времени с 1625 по 1875 г. меняются в пределах от —28″ до +33″. Чтобы дать возможность предвычислять положения Луны с достаточной точностью, Ньюкому пришлось исправленную теорию Ганзена дополнить эмпирическим членом, близким по своей форме и величине к удаленному ошибочному члену. С таким дополнением таблицы Ганзена употреблялись для вычисления астрономических ежегодников до 1923 г., когда они были заменены таблицами Брауна (E. W. Brown, 1866—1938). Аналогичные эмпирические поправки были введены и в таблицы Радо.

Таким образом, к началу XX в. проблема построения гравитационной теории движения Луны была решена двумя разными путями — теорией Ганзена и теорией Делоне, с очень высокой точностью, причем выявилась необходимость дополнения этих теорий некоторыми эмпирическими членами. Третье решение этой проблемы, представляющее, по существу, развитие второй лунной теории Эйлера, было дано в работах Хилла (G. W. Hill, 1838—1914) и Брауна, которые будут рассмотрены в гл. XXI *). Созданная Брауном в 1895—1908 гг. теория была им использована для построения таблиц движения Луны, законченных в 1919 г. **) [E. W. Brown, 1896; 1897, ...; 1915; 1936]. Таблицы Брауна основаны на гравитационной теории, точность которой заведомо превышает точность имеющегося в настоящее время наблюдательного материала. Изобретение электронных вычислительных машин позволило еще раз убедиться (в 1942—1944 гг.) в правильности полученных для координат Луны выражений путем прямой подстановки этих выражений (содержащих несколько тысяч членов сложной структуры) в исходные дифференциальные уравнения.

Но этим была решена только математическая часть задачи. Когда Браун приступил к нахождению постоянных интегрирования из всей совокупности наблюдений, то он скоро убедился, что движение Луны не может быть представлено созданной им чисто гравитационной теорией. Чтобы таблицы представляли наблюдения, в них пришлось включить еще так называемый «большой эмпирический член», очень близкий к эмпирической поправке, предложенной Ньюкомом для теории Ганзена.

Большой эмпирический член, введенный Брауном как дополнение к долготе Луны, вычисленной на основании закона тяготения, выражается формулой

$$+10'',71 \sin(140^\circ,0\,T+240^\circ,7),$$

где через T обозначено время, считаемое от 0 янв. 1900 г. и выраженное в юлианских столетиях. Таким образом, наблюдаемая невязка в долготе была с удовлетворительной для многих целей точностью представлена одним синусоидальным членом с периодом в 257 лет. Однако в тех случаях, когда положение Луны нужно было предвычислить с большою точностью,

---

*) Приспособление метода Хилла — Брауна к вычислениям при помощи быстродействующих электронных вычислительных машин дано в работе В. А. Шора [1960].

**) К этому же времени относятся исследования М. А. Вильева по теории движения Луны [1919].

например, для предвычисления солнечных затмений, координаты Луны, найденные по таблицам Брауна (с учетом только что указанного эмпирического члена), еще подправляют, экстраполируя вперед поправки, полученные из наблюдений Луны за последние годы.

Все эти отклонения долготы Луны от чисто гравитационной теории нашли свое объяснение одновременно с объяснением причин аналогичных невязок в долготах Меркурия, Венеры и Земли, открытых в первой четверти XX в. Тщательный анализ всех этих невязок, выполненный в работах Ньюкома, Брауна, де Ситтера (W. de Sitter, 1872—1934) и Спенсера Джонса (H. Spencer Jones) завершился открытием весьма простой зависимости между ними. Если через B обозначить разность между наблюденной долготой Луны и ее значением, даваемым гравитационной теорией (эта разность получила название **флуктуации**), то аналогичная разность для Меркурия оказывается равной 0,310 B, т. е. величине B, уменьшенной во столько раз, во сколько среднее суточное движение Меркурия (4°,09) меньше среднего суточного движения Луны (13°,18). Эта закономерность оказывается справедливой и для Венеры и для Земли, невязки в долготах которых хорошо представляются выражениями 0,112 B и 0,0747 B. Что касается долготы Марса, то в ней соответствующая невязка едва ощутима и еще недостаточно хорошо изучена. В долготах остальных планет соответствующие величины находятся за пределами точности наблюдений.

Из всех этих результатов с полной очевидностью вытекало, что невязки в долготе Луны, так долго заставлявшие придавать к гравитационной теории эмпирические поправки, так же как и аналогичные невязки в движениях планет, представляют собою не реальные особенности их движений, а являются лишь отражением в их движениях неравномерности вращения Земли, использовавшегося астрономами для измерения времени. Таким образом, в результате ряда работ, начатых мемуаром Ньюкома 1876 г. и завершенных в 1939 г. мемуаром Спенсера Джонса, было сделано открытие капитальной важности. Было установлено, что вращение Земли, служившее всегда для измерения времени, происходит неравномерно. С другой стороны, было доказано, что движение Луны согласуется, в пределах точности наших наблюдений, с гравитационной теорией.

Результатом этого открытия было введение в качестве основного аргумента астрономических ежегодников эфемеридного времени, т. е. того равномерно текущего времени, которое является независимой переменной в дифференциальных уравнениях, на которых основываются гравитационные теории движения светил.

Переход от всемирного времени, т. е. времени, измеряемого вращением Земли, к эфемеридному времени, осуществляется при помощи сравнения наблюдаемых положений Луны с ее положениями, даваемыми чисто гравитационной теорией *).

§ 2. Гравитационная теория движения планет. Внешние планеты

Рассмотрим теперь историю создания гравитационной теории движения планет.

Она начинается тремя мемуарами Эйлера, премированными Парижской Академией наук в 1748, 1752 и 1756 гг. **).

В двух первых из этих мемуаров Эйлер делает попытку объяснить отклонения в движениях Юпитера и Сатурна от законов Кеплера. Это была весьма актуальная в то время проблема, тесно связанная с решением вопроса, сохраняет ли закон тяготения свою форму и для очень больших расстояний. Вот почему эта проблема три раза подряд — в 1748, 1750 и 1752 гг. — предлагалась на соискание премии. Работы Эйлера, премированные в 1748 и 1752 гг. (в 1750 г. конкурс не состоялся), хотя и не решали поставленную задачу, содержали весьма важные результаты. В них был сделан первый, но уже значительный шаг в деле приближенного решения дифференциальных уравнений, представляющих возмущенное движение планет. В частности, здесь были заложены основы методов разложения возмущающих сил в тригонометрические ряды, явившиеся ключом всего дальнейшего прогресса в этой области. Из полученных Эйлером результатов следует отметить открытие вековых возмущений эксцентриситетов, наклонов, долгот перигелиев и долгот узлов.

Задача, решавшаяся Эйлером в мемуаре, премированном в 1756 г., заключалась в усовершенствовании теории движения Земли. Здесь впервые была построена гравитационная теория движения планеты с точностью до первых степеней возмущающих масс.

Созданные Эйлером методы были развиты и существенно усовершенствованы Лагранжем (J. L. Lagrange, 1736—1813) и Лапласом. Открытие Лапласом долгопериодических возмущений, возникающих в тех случаях, когда при интегрировании тригонометрических членов появляются малые делители, позволило,

*) Эфемерида Луны, вычисленная по разложениям теории Брауна с учетом рекомендаций VIII Генеральной Ассамблеи Международного Астрономического Союза (Рим, 1952), в результате которых был исключен так называемый Большой эмпирический член и уточнена поправка за аберрацию, носит название «Улучшенной эфемериды Луны» [Лунные эфемериды 1952—1959].

**) Они были опубликованы в издававшемся Парижской Академией наук сборнике: Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences. Paris, t. VI (1750), t. VII (1769), t. VIII (1771).