ТЕОРИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

ГЛАВА III

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения

Задача двух тел заключается в изучении движения двух материальных точек под действием их взаимного притяжения по закону Ньютона. Фундаментальное значение этой задачи обусловлено тем, что при изучении движений небесных тел мы почти всегда каждое тело можем заменить материальной точкой (§ 6, гл. I); с другой стороны, весьма часто встречаются случаи, когда два небесных тела могут рассматриваться как изолированные от внешнего гравитационного воздействия либо полностью, либо хотя бы в первом приближении.

Рассмотрим сначала абсолютное движение двух тел, т. е. их движение относительно произвольной инерциальной системы отсчета.

Обозначим через m_0 и m массы тел S и M, а через $\boldsymbol{\rho}_0$ и $\boldsymbol{\rho}$ векторы, определяющие их положение относительно начала координат O выбранной нами инерциальной координатной системы. Положение тела M относительно S будет определяться вектором

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0.$$

Сила взаимного притяжения, действующая на каждое из рассматриваемых тел, по абсолютной величине равна

$$k^2 m_0 m / r^2,$$

где коэффициент тяготения обозначен, как это принято в теории движения небесных тел, через k^2.

Сообразно с этим, дифференциальные уравнения, определяющие движение S и M, можно написать так:

$$m_0 \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_0}{dt^2} = k^2 \frac{m_0 m}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}; \quad m \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = k^2 \frac{m_0 m}{r^2} \left(\frac{-\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{1.1}$$

Почленное сложение этих уравнений и интегрирование полученного равенства дает

$$m_0\frac{d\boldsymbol{\rho}_0}{dt}+m\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}=\boldsymbol{\alpha};\quad m_0\boldsymbol{\rho}_0+m\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\alpha}t+\boldsymbol{\beta}, \tag{1.2}$$

где не зависящие от времени векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ являются постоянными интегрирования.

Равенства (1.2) представляют шесть интегралов движения центра инерции системы, образованной рассматриваемыми телами. Эти интегралы позволяют привести изучение движения, определяемого уравнениями (1.1), которое принято называть абсолютным движением, к изучению относительного движения. Такое приведение может быть выполнено различно.

Чтобы найти уравнение, определяющее движение M относительно S, нужно почленно вычесть первое из уравнений (1.1) из второго. Это дает

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\frac{k^2(m_0+m)}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{1.3}$$

Если уравнение (1.3) разрешено, то равенства

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{r};\quad m_0\boldsymbol{\rho}_0+m\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\alpha}t+\boldsymbol{\beta}$$

позволят найти $\boldsymbol{\rho}_0$ и $\boldsymbol{\rho}$ в функции времени, что даст абсолютное движение.

Иногда бывает целесообразно рассматривать движение тел S и M относительно их общего центра инерции G.

Положение G относительно O определяется таким вектором $\boldsymbol{\sigma}$, что

$$(m_0+m)\boldsymbol{\sigma}=m_c\boldsymbol{\rho}_0+m\boldsymbol{\rho}. \tag{1.4}$$

Если через $\boldsymbol{s}_0$ и $\boldsymbol{s}$ обозначить векторы, определяющие положение S и M по отношению к G, то

$$\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{s}_0;\quad \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{s}, \tag{1.5}$$

а равенство (1.4) даст

$$m_0\boldsymbol{s}_0+m\boldsymbol{s}=0.$$

Последнее соотношение совместно с очевидным равенством $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0$ дает

$$(m_0+m)\boldsymbol{s}_0=-m\boldsymbol{r};\quad (m_0+m)\boldsymbol{s}=m_0\boldsymbol{r}. \tag{1.6}$$

Таким образом, орбиты, описываемые телами S и M вокруг их общего центра инерции G, подобны между собой и подобны орбите, описываемой одним телом вокруг другого.

Подстановка выражений (1.5) в уравнения движения относительно центра инерции дает

$$\frac{d^2 s_0}{dt^2} = \frac{-k^2 m^3}{(m_0+m)^2} \frac{s_0}{s_0^3}; \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{-k^2 m_0^3}{(m_0+m)^2} \frac{s}{s^3}. \tag{1.7}$$

Каждое из этих уравнений имеет такой же вид, как и уравнение (1.3), так что изучение относительного движения в обоих случаях приводится к решению уравнения вида

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\varkappa^2 r r^{-3}, \tag{1.8}$$

где $\varkappa^2$ — положительный постоянный множитель, зависящий от постоянной тяготения и масс рассматриваемых тел.

В дальнейшем мы будем почти всегда изучать движение одного тела относительно другого. Поэтому, если не будет особо оговорено, будем считать, что

$$\varkappa^2 = k^2 (m_0 + m). \tag{1.9}$$

Для сокращения письма можно было бы в уравнении (1.8) принять за независимую переменную величину $\varkappa t$. Тогда это уравнение приняло бы вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + r r^{-3} = 0,$$

не содержащий явно притягивающие массы. Таким образом, в задаче двух тел изменение масс эквивалентно изменению единицы времени.

§ 2. Первые интегралы уравнений относительного движения

Уравнение (1.8), к решению которого приводится задача двух тел, эквивалентно следующей системе шестого порядка:

$$x'' + \varkappa^2 x r^{-3} = 0; \quad y'' + \varkappa^2 y r^{-3} = 0; \quad z'' + \varkappa^2 z r^{-3} = 0, \tag{2.1}$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Эти уравнения можно написать в форме

$$x'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa^2}{r}\right); \quad y'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa^2}{r}\right); \quad z'' = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varkappa^2}{r}\right). \tag{2.2}$$

Они представляют движение материальной точки единичной массы под действием центральной силы, имеющей силовую функцию. Основные теоремы механики дают поэтому четыре первых интеграла этих уравнений.