Подстановка выражений (1.5) в уравнения движения относительно центра инерции дает

$$\frac{d^2 s_0}{dt^2} = \frac{-k^2 m^3}{(m_0 + m)^2} \frac{s_0}{s_0^3}; \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{-k^2 m_0^3}{(m_0 + m)^2} \frac{s}{s^3}. \tag{1.7}$$

Каждое из этих уравнений имеет такой же вид, как и уравнение (1.3), так что изучение относительного движения в обоих случаях приводится к решению уравнения вида

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\varkappa^2 r r^{-3}, \tag{1.8}$$

где $\varkappa^2$ — положительный постоянный множитель, зависящий от постоянной тяготения и масс рассматриваемых тел.

В дальнейшем мы будем почти всегда изучать движение одного тела относительно другого. Поэтому, если не будет особо оговорено, будем считать, что

$$\varkappa^2 = k^2 (m_0 + m). \tag{1.9}$$

Для сокращения письма можно было бы в уравнении (1.8) принять за независимую переменную величину $\varkappa t$. Тогда это уравнение приняло бы вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + r r^{-3} = 0,$$

не содержащий явно притягивающие массы. Таким образом, в задаче двух тел изменение масс эквивалентно изменению единицы времени.

§ 2. Первые интегралы уравнений относительного движения

Уравнение (1.8), к решению которого приводится задача двух тел, эквивалентно следующей системе шестого порядка:

$$x'' + \varkappa^2 x r^{-3} = 0; \quad y'' + \varkappa^2 y r^{-3} = 0; \quad z'' + \varkappa^2 z r^{-3} = 0, \tag{2.1}$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Эти уравнения можно написать в форме

$$x'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa^2}{r}\right); \quad y'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa^2}{r}\right); \quad z'' = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varkappa^2}{r}\right). \tag{2.2}$$

Они представляют движение материальной точки единичной массы под действием центральной силы, имеющей силовую функцию. Основные теоремы механики дают поэтому четыре первых интеграла этих уравнений.

Интегралы площадей. Векторное умножение уравнения (1.8) на $\boldsymbol{r}$ дает

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=0,$$

откуда

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}=\varkappa\boldsymbol{c}, \tag{2.3}$$

где

$$\boldsymbol{V}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

а через $\boldsymbol{c}$ обозначена постоянная, введенная интегрированием. Это равенство, выражающее постоянство вращательного импульса (иначе называемого моментом количества движения), будучи написано в скалярной форме, дает три интеграла площадей:

$$yz'-zy'=\varkappa c_x;\quad zx'-xz'=\varkappa c_y;\quad xy'-yx'=\varkappa c_z. \tag{2.4}$$

Так как левая часть равенства (2.3) представляет удвоенную секторную скорость движущейся точки, то интегралы площадей выражают постоянство секторной скорости.

Скалярное умножение равенства (2.3) на $\boldsymbol{r}$ дает

$$\boldsymbol{cr}=0,$$

или

$$c_x x+c_y y+c_z z=0. \tag{2.5}$$

Таким образом, движение происходит в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{c}$.

Интеграл энергии. Почленное умножение уравнений (2.2) на x', y', z', сложение их и интегрирование полученного равенства дает интеграл энергии:

$$x'^2+y'^2+z'^2=2\varkappa^2r^{-1}+\varkappa^2h. \tag{2.6}$$

Входящая в него постоянная h носит название постоянной энергии.

Равенство (2.6) можно написать так:

$$V^2=\varkappa^2(2r^{-1}+h). \tag{2.7}$$

Отсюда видно, что постоянная энергии не зависит ни от системы координат, ни от направления скорости.

Поскольку скорость не может быть мнимой, то при $h<0$ движущаяся точка не может выйти из сферы

$$r=-2h^{-1},$$

во всех точках которой скорость равна нулю. Эту сферу будем называть поверхностью нулевой скорости.