§ 3. Движение в плоскости орбиты

Равенство (2.5) показывает, что движение происходит в неизменной плоскости. Положение этой плоскости и секторная скорость движения в ней определяются постоянными интегрирования c_x, c_y, c_z.

Положение плоскости орбиты при решении астрономических задач принято определять не коэффициентами ее уравнения, а двумя углами, имеющими более непосредственное геометрическое значение.

Прямая NSN' (рис. 5), по которой плоскость орбиты пересекается с основной координатной плоскостью Sxy, называется линией узлов. Полупрямая SN, которую точка M пересекает, переходя из области $z<0$ в область $z>0$, называется положительным направлением линии узлов. Угол между осью Sx и SN называется долготой восходящего узла и обозначается обычно буквой Ω. Этот угол отсчитывается от оси Sx в сторону оси Sy от 0° до 360°.

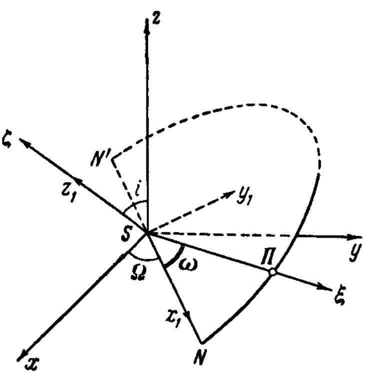

Рис. 5.

Угол между плоскостью орбиты и плоскостью Sxy называется наклоном орбиты*).

Условимся называть положительной нормалью $S\zeta$ к плоскости орбиты ту нормаль, относительно которой движение точки M по орбите осуществляет правостороннее вращение. Наклон орбиты будет измеряться углом i между $S\zeta$ и Sz. Наклон может иметь все значения от 0° до 180°. Если $0° \leqslant i < 90°$, то движение называется прямым, если же $90° < i \leqslant 180°$, то говорят, что движение обратное.

Так как изучаемое движение плоское, то выгодно от координатной системы $Sxyz$ перейти к системе $Sx_1y_1z_1$, в которой за основную плоскость принята плоскость траектории.

За ось Sx_1 новой системы примем положительное направление SN линии узлов; за ось Sz_1 примем положительное направление $S\zeta$ нормали к плоскости орбиты. Таким образом, движение точки M будет происходить в направлении от Sx_1 к Sy_1.

---

*) Это название, введенное автором в 1949 г. вместо прежнего «наклонение орбиты», в настоящее время включено в список рекомендуемых обозначений в астрономии.

Переход к системе $Sx_1y_1z_1$ выполним в два этапа. Сначала перейдем от системы $Sxyz$ к промежуточной системе Sx_1y^0z, получающейся из $Sxyz$ путем поворота около оси Sz на угол Ω. Формулы перехода

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\Omega - y^0 \sin\Omega, \\ y &= x_1 \sin\Omega + y^0 \cos\Omega, \\ z &= z \end{aligned}$$

запишем в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ y^0 \\ z \end{Vmatrix}.$$

Переход от промежуточной системы Sx_1y^0z к системе $Sx_1y_1z_1$ осуществляется путем поворота около оси Sx_1 на угол i. Следовательно,

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y^0 \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}.$$

Подстановка этого выражения в правую часть предыдущего равенства дает

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}, \qquad (3.1)$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\cos i \sin\Omega & \sin i \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i \cos\Omega & -\sin i \cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}. \qquad (3.2)$$

Теперь легко найти зависимость между постоянными интегрирования c_x, c_y, c_z и введенными нами величинами Ω и i. Отложим по нормали $S\zeta$ отрезок SC, равный

$$c = \left(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2\right)^{1/2},$$

т. е. абсолютной величине вектора $\boldsymbol{c}$. Координаты точки C в старой системе равны c_x, c_y, c_z, тогда как в новой они равны 0, 0, c. Формула (3.2) дает поэтому

$$c_x = c \sin i \sin\Omega; \quad c_y = -c \sin i \cos\Omega; \quad c_z = c \cos i. \qquad (3.3)$$

Таким образом, приняв за постоянные интегрирования c, Ω и i, интегралы площадей (2.4) можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} yz' - zy' &= \quad \varkappa c \sin i \sin \Omega, \\ zx' - xz' &= - \varkappa c \sin i \cos \Omega, \\ xy' - yx' &= \quad \varkappa c \cos i. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

В системе координат $Sx_1y_1z_1$, когда $z_1 = 0$, эти интегралы приводятся к одному:

$$x_1y_1' - y_1x_1' = \varkappa c. \tag{3.5}$$

Введем полярные координаты точки M: радиус-вектор $r = SM$ и полярный угол u, образуемый этим радиусом-вектором с осью Sx_1. Подставив координаты

$$x_1 = r \cos u; \quad y_1 = r \sin u; \quad z_1 = 0 \tag{3.6}$$

точки M в формулу (3.2), получим следующие выражения для ее координат в исходной системе:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Изучение движения M приводится, таким образом, к нахождению r и u в функции времени.

Введенный нами полярный угол u, т. е. угловое расстояние точки M от положительного направления линии узлов, называется аргументом широты.

§ 4. Траектория движения

Для решения задачи о выражении r и u в функции времени воспользуемся интегралом площадей (3.5) и интегралом энергии (2.7). Переходя в этих интегралах к полярным координатам при помощи (3.6), будем иметь два уравнения:

$$r^2 \frac{du}{dt} = \varkappa c, \tag{4.1}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\varkappa^2 r^{-1} + \varkappa^2 h. \tag{4.2}$$

Решение этих уравнений удобно начать с нахождения зависимости между r и u, т. е. с вывода уравнения траектории.

Рассмотрим сначала случай, когда $c \neq 0$. Уравнение (4.1) дает

$$\frac{du}{dt} = \frac{\varkappa c}{r^2}; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = \frac{\varkappa c}{r^2}\frac{dr}{du}.$$