виде:

$$\left.\begin{aligned} yz' - zy' &= \varkappa c \sin i \sin \Omega, \\ zx' - xz' &= -\varkappa c \sin i \cos \Omega, \\ xy' - yx' &= \varkappa c \cos i. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

В системе координат $Sx_1y_1z_1$, когда $z_1=0$, эти интегралы приводятся к одному:

$$x_1y_1' - y_1x_1' = \varkappa c. \tag{3.5}$$

Введем полярные координаты точки M: радиус-вектор $r=SM$ и полярный угол u, образуемый этим радиусом-вектором с осью Sx_1. Подставив координаты

$$x_1 = r\cos u; \quad y_1 = r\sin u; \quad z_1 = 0 \tag{3.6}$$

точки M в формулу (3.2), получим следующие выражения для ее координат в исходной системе:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Изучение движения M приводится, таким образом, к нахождению r и u в функции времени.

Введенный нами полярный угол u, т. е. угловое расстояние точки M от положительного направления линии узлов, называется аргументом широты.

§ 4. Траектория движения

Для решения задачи о выражении r и u в функции времени воспользуемся интегралом площадей (3.5) и интегралом энергии (2.7). Переходя в этих интегралах к полярным координатам при помощи (3.6), будем иметь два уравнения:

$$r^2 \frac{du}{dt} = \varkappa c, \tag{4.1}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\varkappa^2 r^{-1} + \varkappa^2 h. \tag{4.2}$$

Решение этих уравнений удобно начать с нахождения зависимости между r и u, т. е. с вывода уравнения траектории.

Рассмотрим сначала случай, когда $c \neq 0$. Уравнение (4.1) дает

$$\frac{du}{dt} = \frac{\varkappa c}{r^2}; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = \frac{\varkappa c}{r^2}\frac{dr}{du}.$$

Исключая теперь время из уравнения (4.2), получим

$$\frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = h + \frac{2}{r} - \frac{c^2}{r^2},$$

или

$$\left[\frac{d}{du}\left(\frac{c}{r}\right)\right]^2 = h + \frac{1}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c}\right)^2,$$

или

$$\left[\frac{d}{du}\left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c}\right)\right]^2 = A^2 - \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c}\right)^2,$$

где

$$A^2 = h + c^{-2}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{c}{r} - \frac{1}{c} = A\cos(u - \omega),$$

где через ω обозначена постоянная, введенная интегрированием, откуда

$$r = \frac{c^2}{1 + Ac\cos(u - \omega)}.$$

Такое уравнение представляет, как известно, коническое сечение с фокусом в начале координат S. Отождествляя его со стандартным уравнением конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{4.3}$$

где p — параметр, e — эксцентриситет, а v — истинная аномалия (гл. I, § 3), получим

$$p = c^2; \quad e = Ac = (1 + hc^2)^{1/2}, \tag{4.4}$$

$$v = u - \omega. \tag{4.5}$$

Так как $p = a(1 - e^2)$, то соотношения (4.4) дают

$$c = \sqrt{p}; \quad h = -a^{-1}. \tag{4.6}$$

Равенство (4.5) показывает, что новая постоянная интегрирования ω есть значение полярного угла u, соответствующее значению $v = 0$, т. е. перицентру. Эту постоянную будем называть аргументом перицентра (для планет и комет — аргументом перигелия). Она называется также расстоянием перигелия от узла.

Вид конического сечения, описываемого точкой M, определяется, как показывает соотношение (4.4), знаком постоянной энергии. Если $h < 0$, то $e < 1$, и движение происходит по эллипсу; если $h = 0$, то $e = 1$ и уравнение (4.3) представляет параболу; если, наконец, $h > 0$, то $e > 1$ и движение происходит по гиперболе.

Заметим, что интеграл энергии (2.7) принимает теперь вид

$$V^2 = \varkappa^2(2r^{-1} - a^{-1}). \tag{4.7}$$

Этот интеграл показывает, что абсолютная величина скорости в каждой точке орбиты зависит только от большой полуоси и радиуса-вектора этой точки.

Обратно, абсолютная величина скорости на данном расстоянии от центрального тела вполне определяет (при фиксированном значении $\varkappa$) величину большой полуоси. Так, например, в случае $h<0$ при одной и той же величине скорости V точка M (рис. 6) будет описывать различные эллипсы в зависимости от направления скорости. Но большие полуоси всех этих эллипсов будут равны одной и той же величине a, определяемой соотношением (4.7). Каково бы ни было направление начальной скорости, движущаяся точка не может выйти за пределы окружности, описанной из S как центра радиусом $SA=2a$. Эта окружность является пересечением плоскости орбиты с поверхностью нулевой скорости (§ 2).

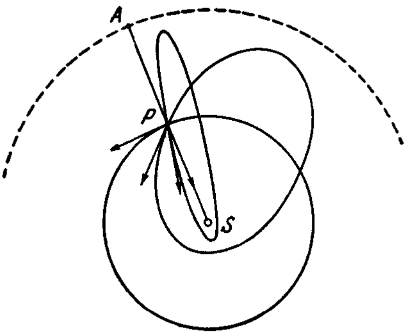

Рис. 6.

Заметим, что скорость эллиптического движения на расстоянии $SM=r$ от притягивающего центра S равняется той, которую приобретает в M тело, свободно падающее из A, т. е. с расстояния $2a$.

Если в уравнении (4.7) положить $a=\infty$, что соответствует движению по параболе, то получим скорость

$$V_p=\varkappa\sqrt{\frac{2}{r}},$$

которая называется параболической. Такую скорость имеет на расстоянии r от центра притяжения тело, свободно падающее из бесконечности.

Если $V<V_p$, то $a>0$ и, следовательно, движение происходит по эллипсу; если $V=V_p$, то движение происходит по параболе; наконец, если $V>V_p$, то $a<0$, и потому движение происходит по гиперболе.

Как известно, большинство комет движется по орбитам, мало отличающимся в пределах солнечной системы от парабол, тогда как орбиты планет мало отличаются от окружностей. Так как для кругового движения (при $r=a$) формула (4.7) дает

$$V=\varkappa\sqrt{\frac{1}{r}},$$

то отсюда следует, что скорость кометы в случае пересечения планетной орбиты в $\sqrt{2}$ раз больше скорости планеты.

Нам остается рассмотреть случай, когда $c=0$. Уравнение (4.1) показывает, что здесь движение происходит по прямой $u=\omega+180°$, где $\omega=\text{const}$, проходящей через точку S. Координаты точки M в системе $Sx_1y_1z_1$ даются параметрическими уравнениями

$$x_1 = -r\cos\omega; \quad y_1 = -r\sin\omega; \quad z_1 = 0, \tag{4.8}$$

причем радиус-вектор r находится в функции времени при помощи уравнения

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \varkappa^2(2r^{-1}+h), \tag{4.9}$$

вытекающего из интеграла энергии (4.2). Решение этого уравнения будет рассмотрено в § 9.

§ 5. Движение по эллипсу

Чтобы закончить изучение движения в задаче двух тел, остается решить совместно найденное в предыдущем параграфе уравнение траектории

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \tag{5.1}$$

и уравнение

$$r^2\frac{dv}{dt} = \varkappa\sqrt{a(1-e^2)}, \tag{5.2}$$

выражающее интеграл площадей.

В том случае, когда движение происходит по эллипсу, т. е. когда $e<1$, $a>0$, мы можем ввести в качестве вспомогательной переменной эксцентрическую аномалию E. Тогда (§ 3, гл. I):

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E; \quad r\cos v = a(\cos E - e), \tag{5.3}$$

$$r = a(1-e\cos E). \tag{5.4}$$

Дифференцирование соотношений (5.3) дает, как легко убедиться,

$$r\,dv = a\sqrt{1-e^2}\,dE. \tag{5.5}$$

Подставив выражения (5.4) и (5.5) в уравнение (5.2), получим

$$(1-e\cos E)\,dE = \varkappa a^{-3/2}\,dt.$$

Отсюда после интегрирования найдем уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = \varkappa a^{-3/2}(t-T), \tag{5.6}$$

где T — постоянная интегрирования. Это уравнение было нами выведено раньше (гл. I, § 3) тем путем, которым шел Кеплер,