то отсюда следует, что скорость кометы в случае пересечения планетной орбиты в $\sqrt{2}$ раз больше скорости планеты.

Нам остается рассмотреть случай, когда $c=0$. Уравнение (4.1) показывает, что здесь движение происходит по прямой $u=\omega+180°$, где $\omega=\text{const}$, проходящей через точку S. Координаты точки M в системе $Sx_1y_1z_1$ даются параметрическими уравнениями

$$x_1 = -r\cos\omega; \quad y_1 = -r\sin\omega; \quad z_1 = 0, \tag{4.8}$$

причем радиус-вектор r находится в функции времени при помощи уравнения

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \varkappa^2(2r^{-1}+h), \tag{4.9}$$

вытекающего из интеграла энергии (4.2). Решение этого уравнения будет рассмотрено в § 9.

§ 5. Движение по эллипсу

Чтобы закончить изучение движения в задаче двух тел, остается решить совместно найденное в предыдущем параграфе уравнение траектории

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \tag{5.1}$$

и уравнение

$$r^2\frac{dv}{dt} = \varkappa\sqrt{a(1-e^2)}, \tag{5.2}$$

выражающее интеграл площадей.

В том случае, когда движение происходит по эллипсу, т. е. когда $e<1$, $a>0$, мы можем ввести в качестве вспомогательной переменной эксцентрическую аномалию E. Тогда (§ 3, гл. I):

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E; \quad r\cos v = a(\cos E - e), \tag{5.3}$$

$$r = a(1-e\cos E). \tag{5.4}$$

Дифференцирование соотношений (5.3) дает, как легко убедиться,

$$r\,dv = a\sqrt{1-e^2}\,dE. \tag{5.5}$$

Подставив выражения (5.4) и (5.5) в уравнение (5.2), получим

$$(1-e\cos E)\,dE = \varkappa a^{-3/2}\,dt.$$

Отсюда после интегрирования найдем уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = \varkappa a^{-3/2}(t-T), \tag{5.6}$$

где T — постоянная интегрирования. Это уравнение было нами выведено раньше (гл. I, § 3) тем путем, которым шел Кеплер, не имевший в своем распоряжении дифференциального и интегрального исчислений.

Величина

$$n = \varkappa a^{-3/2} = k\sqrt{m_0 + m}\, a^{-3/2}, \tag{5.7}$$

где $\varkappa$ дается равенством (1.9), называется средним движением, а

$$M = n(t - T) \tag{5.8}$$

— средней аномалией.

При изучении движения планет вместо постоянной интегрирования T, представляющей, очевидно, момент прохождения планеты через перигелий, удобнее пользоваться другой величиной. Обозначим через t_0 какой-либо определенный момент времени и перепишем равенство (5.8) так:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \tag{5.9}$$

где

$$M_0 = n(t_0 - T)$$

есть средняя аномалия для момента t_0, или, как принято говорить, средняя аномалия эпохи t_0.

Вычисление средней аномалии M по формуле (5.9) удобнее при малых эксцентриситетах потому, что M_0 сохраняет смысл и при $e=0$, тогда как T становится неопределенным.

При возрастании E от $-\infty$ до $+\infty$ функция $E - e\sin E$, производная которой всегда положительна, монотонно возрастает в тех же границах. Отсюда следует, что уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = M \tag{5.10}$$

при любом значении M имеет одно и только одно вещественное решение.

После того как решение уравнения (5.10) дало значение E, соответствующее заданному моменту t, по формулам (5.3) и (5.4) можно найти r, v, а следовательно, и $u = v + \omega$. Формулы (3.7) дадут координаты x, y, z.

Таким образом, координаты рассматриваемого тела нами выражены в функции времени и шести постоянных

$$a,\ e,\ M_0,\ \Omega,\ i,\ \omega,$$

введенных интегрированием.

§ 6. Движение по гиперболе

Этот случай отличается от рассмотренного в предыдущем параграфе случая эллиптического движения только тем, что в уравнениях (5.1) и (5.2), подлежащих разрешению относительно r и v, надо считать $e > 1$, $a < 0$.