не имевший в своем распоряжении дифференциального и интегрального исчислений.

Величина

$$n = \varkappa a^{-3/2} = k\sqrt{m_0 + m}\, a^{-3/2}, \tag{5.7}$$

где $\varkappa$ дается равенством (1.9), называется *средним движением*, а

$$M = n(t - T) \tag{5.8}$$

— *средней аномалией*.

При изучении движения планет вместо постоянной интегрирования T, представляющей, очевидно, момент прохождения планеты через перигелий, удобнее пользоваться другой величиной. Обозначим через t_0 какой-либо определенный момент времени и перепишем равенство (5.8) так:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \tag{5.9}$$

где

$$M_0 = n(t_0 - T)$$

есть средняя аномалия для момента t_0, или, как принято говорить, *средняя аномалия эпохи* t_0.

Вычисление средней аномалии M по формуле (5.9) удобнее при малых эксцентриситетах потому, что M_0 сохраняет смысл и при $e=0$, тогда как T становится неопределенным.

При возрастании E от $-\infty$ до $+\infty$ функция $E - e\sin E$, производная которой всегда положительна, монотонно возрастает в тех же границах. Отсюда следует, что уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = M \tag{5.10}$$

при любом значении M имеет одно и только одно вещественное решение.

После того как решение уравнения (5.10) дало значение E, соответствующее заданному моменту t, по формулам (5.3) и (5.4) можно найти r, v, а следовательно, и $u = v + \omega$. Формулы (3.7) дадут координаты x, y, z.

Таким образом, координаты рассматриваемого тела нами выражены в функции времени и шести постоянных

$$a,\ e,\ M_0,\ \Omega,\ i,\ \omega,$$

введенных интегрированием.

§ 6. Движение по гиперболе

Этот случай отличается от рассмотренного в предыдущем параграфе случая эллиптического движения только тем, что в уравнениях (5.1) и (5.2), подлежащих разрешению относительно r и v, надо считать $e > 1$, $a < 0$.

Но сделанная нами подстановка (5.3), выражающая r и v через E, одинаково применима и в случае гиперболического движения, так как она тождественно удовлетворяет уравнению орбиты (5.1) при всех значениях a и e.

Отличие заключается только в том, что для $e>1$, $a<0$ формулы (5.3) дают для $\sin E$ мнимое значение, тогда как $\cos E$ остается величиной вещественной. Сообразно с этим, здесь удобнее вместо E ввести величину

$$H=iE,$$

имеющую для гиперболического движения вещественные значения.

Это дает

$$i\sin E=\operatorname{sh} H; \quad \cos E=\operatorname{ch} H,$$

вследствие чего соотношения (5.3) и (5.4) принимают вид

$$r\sin v=|a|\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh} H; \quad r\cos v=|a|(e-\operatorname{ch} H), \tag{6.1}$$

$$r=|a|(e\operatorname{ch} H-1), \tag{6.2}$$

а уравнение Кеплера (5.6) обращается в

$$e\operatorname{sh} H-H=\varkappa|a|^{-3/2}(t-T). \tag{6.3}$$

При изменении H от $-\infty$ до $+\infty$ стоящая слева функция монотонно изменяется в тех же границах, поскольку ее производная всегда положительна. Отсюда следует, что при каждом значении t уравнение (6.3) имеет одно и только одно вещественное решение.

§ 7. Движение по параболе

Если $e=1$, то траектория движения является параболой. Уравнение траектории (4.3) принимает вид

$$r=\frac{p}{1+\cos v}.$$

Полагая

$$q=\frac{1}{2}p,$$

это уравнение можно представить так:

$$r=q\sec^2\frac{v}{2}. \tag{7.1}$$

Вместо двух элементов a и e, характеризующих форму и размеры эллипса или гиперболы, мы имеем для параболы только один элемент q. Он носит название **перигельного расстояния**, так как $r=q$, если $v=0$.