Но сделанная нами подстановка (5.3), выражающая r и v через E, одинаково применима и в случае гиперболического движения, так как она тождественно удовлетворяет уравнению орбиты (5.1) при всех значениях a и e.

Отличие заключается только в том, что для $e>1$, $a<0$ формулы (5.3) дают для $\sin E$ мнимое значение, тогда как $\cos E$ остается величиной вещественной. Сообразно с этим, здесь удобнее вместо E ввести величину

$$H=iE,$$

имеющую для гиперболического движения вещественные значения.

Это дает

$$i\sin E=\operatorname{sh} H; \quad \cos E=\operatorname{ch} H,$$

вследствие чего соотношения (5.3) и (5.4) принимают вид

$$r\sin v=|a|\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh} H; \quad r\cos v=|a|(e-\operatorname{ch} H), \tag{6.1}$$

$$r=|a|(e\operatorname{ch} H-1), \tag{6.2}$$

а уравнение Кеплера (5.6) обращается в

$$e\operatorname{sh} H-H=\varkappa|a|^{-3/2}(t-T). \tag{6.3}$$

При изменении H от $-\infty$ до $+\infty$ стоящая слева функция монотонно изменяется в тех же границах, поскольку ее производная всегда положительна. Отсюда следует, что при каждом значении t уравнение (6.3) имеет одно и только одно вещественное решение.

§ 7. Движение по параболе

Если $e=1$, то траектория движения является параболой. Уравнение траектории (4.3) принимает вид

$$r=\frac{p}{1+\cos v}.$$

Полагая

$$q=\frac{1}{2}p,$$

это уравнение можно представить так:

$$r=q\sec^2\frac{v}{2}. \tag{7.1}$$

Вместо двух элементов a и e, характеризующих форму и размеры эллипса или гиперболы, мы имеем для параболы только один элемент q. Он носит название **перигельного расстояния**, так как $r=q$, если $v=0$.

Подставив выражение (7.1) в интеграл площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \varkappa \sqrt{2q},$$

получим

$$\sec^4 \frac{v}{2} dv = \sqrt{2} \varkappa q^{-3/2} dt.$$

Это равенство можно написать так:

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) d \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2}\right) = \frac{\varkappa \, dt}{\sqrt{2} q^{3/2}},$$

откуда, полагая

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sigma, \tag{7.2}$$

получим

$$\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{\varkappa}{\sqrt{2}} B, \tag{7.3}$$

где

$$B = q^{-3/2} (t - T). \tag{7.4}$$

Введенная интегрированием постоянная T есть, очевидно, момент прохождения через перигелий. Величину B будем называть *параболическим аргументом*.

При изменении v от $-180°$ до $+180°$ левая часть уравнения (7.3) монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, это уравнение для каждого значения t дает одно и только одно вещественное значение v.

§ 8. Введение прямоугольных орбитальных координат

Остановимся еще на вопросе о выражении координат x, y, z, определяющих относительную конфигурацию системы в задаче двух тел, в функции времени и постоянных интегрирования.

В предыдущих параграфах мы видели, что в том случае, когда вращательный импульс не равен нулю, движение происходит по коническому сечению. Оно полностью определяется в самом общем случае шестью постоянными интегрирования, носящими название *элементов орбиты*.

Если постоянная энергии не равна нулю, за элементы орбиты можно принять следующие величины:

$$a, \ e, \ M_0 \ (\text{или } T), \ \Omega, \ i, \ \omega,$$

называемые эллиптическими (или гиперболическими) элементами орбиты.

Когда постоянная энергии равна нулю, орбита определяется пятью параболическими элементами:

$$q, \ T, \ \Omega, \ i, \ \omega.$$