Подставив выражение (7.1) в интеграл площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \varkappa \sqrt{2q},$$

получим

$$\sec^4 \frac{v}{2} dv = \sqrt{2} \varkappa q^{-3/2} dt.$$

Это равенство можно написать так:

$$\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{v}{2}\right) d \left(\mathrm{tg} \frac{v}{2}\right) = \frac{\varkappa \, dt}{\sqrt{2} q^{3/2}},$$

откуда, полагая

$$\mathrm{tg} \frac{v}{2} = \sigma, \tag{7.2}$$

получим

$$\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{\varkappa}{\sqrt{2}} B, \tag{7.3}$$

где

$$B = q^{-3/2} (t - T). \tag{7.4}$$

Введенная интегрированием постоянная T есть, очевидно, момент прохождения через перигелий. Величину B будем называть *параболическим аргументом*.

При изменении v от -180° до $+180^\circ$ левая часть уравнения (7.3) монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, это уравнение для каждого значения t дает одно и только одно вещественное значение v.

§ 8. Введение прямоугольных орбитальных координат

Остановимся еще на вопросе о выражении координат x, y, z, определяющих относительную конфигурацию системы в задаче двух тел, в функции времени и постоянных интегрирования.

В предыдущих параграфах мы видели, что в том случае, когда вращательный импульс не равен нулю, движение происходит по коническому сечению. Оно полностью определяется в самом общем случае шестью постоянными интегрирования, носящими название *элементов орбиты*.

Если постоянная энергии не равна нулю, за элементы орбиты можно принять следующие величины:

$$a, \ e, \ M_0 \ (\text{или } T), \ \Omega, \ i, \ \omega,$$

называемые эллиптическими (или гиперболическими) элементами орбиты.

Когда постоянная энергии равна нулю, орбита определяется пятью параболическими элементами:

$$q, \ T, \ \Omega, \ i, \ \omega.$$

Число элементов уменьшается также для круговой орбиты, когда положение перигелия становится неопределенным, и для орбиты, лежащей в основной плоскости Sxy, когда отпадает понятие узлов орбиты.

Изложенный в предыдущих параграфах метод вычисления координат x, y, z распадается на два этапа. Сначала вычисляются полярные орбитальные координаты r и v, что делается различно, в зависимости от вида орбиты. После этого находится аргумент широты

$$u = v + \omega,$$

и по формулам (3.7) вычисляются прямоугольные декартовы координаты x, y, z.

Другой способ решения той же задачи основан на употреблении прямоугольных орбитальных координат

$$\xi = r\cos v; \quad \eta = r\sin v.$$

Эти координаты являются более простыми функциями времени, нежели соответствующие полярные координаты.

В самом деле, для эллиптического и гиперболического движений мы имеем выражения

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E \tag{8.1}$$

и

$$\xi = |a|(e - \operatorname{ch} H); \quad \eta = |a|\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh} H, \tag{8.2}$$

очень легко вычисляемые, как только решено уравнение Кеплера (5.6) или соответствующее ему уравнение (6.3).

Для параболического движения из формул (7.1) и (7.2) легко выводим

$$\xi = q(1-\sigma^2); \quad \eta = 2q\sigma, \tag{8.3}$$

где σ находится путем решения кубического уравнения (7.3).

Прямоугольная орбитальная система координат $S\xi\eta\zeta$, у которой ось $S\xi$ направлена в перигелий П (см. рис. 5 на стр. 76), получается из системы $Sx_1y_1z_1$, рассматривавшейся нами в § 3, путем поворота вокруг оси Sz_1 (тождественной с $S\zeta$) на угол ω. Таким образом,

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Результат подстановки этого выражения в формулу (3.1) запишем в сокращенном виде:

$$\{x, y, z\} = \boldsymbol{Z}(\Omega)\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{Z}(\omega)\{\xi, \eta, 0\} \tag{8.4}$$

Символами $X(\alpha)$ и $Z(\alpha)$ будем обозначать матрицы, соответствующие повороту на угол α вокруг оси абсцисс и оси аппликат, так что

$$X(\alpha)=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{Vmatrix},\qquad Z(\alpha)=\begin{Vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Символом $\{a, b, c\}$ обозначена, как обычно, матрица, состоящая из одного столбца.

Равенство (8.4) можно написать так:

$$\begin{Vmatrix}x\\ y\\ z\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}p_x & q_x & r_x\\ p_y & q_y & r_y\\ p_z & q_z & r_z\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\xi\\ \eta\\ 0\end{Vmatrix}, \tag{8.5}$$

причем, как нетрудно убедиться, выполнив перемножение трех первых множителей в правой части равенства (8.4),

$$\left.\begin{aligned}
p_x &= \cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos i,\\
p_y &= \cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos i,\\
p_z &= \sin\omega\sin i,\\
q_x &= -\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\sin\Omega\cos i,\\
q_y &= -\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i,\\
q_z &= \cos\omega\sin i,\\
r_x &= \sin i\sin\Omega,\\
r_y &= -\sin i\cos\Omega,\\
r_z &= \cos i.
\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Таковы направляющие косинусы орбитальных осей координат. Если вычисления ведутся при помощи арифмометра, то чаще всего предпочитают находить их не по формулам (8.6), а путем численного перемножения соответствующих матриц.

§ 9. Случай прямолинейного движения

Нам остается рассмотреть тот случай движения, когда вращательный импульс c равен нулю.

Мы уже видели, что движение происходит в этом случае по прямой, имеющей параметрические уравнения (4.8). Радиус-вектор, который в этих уравнениях служит параметром, определяется уравнением (4.9). Введем вместо постоянной энергии h