

Символами $X(\alpha)$ и $Z(\alpha)$ будем обозначать матрицы, соответствующие повороту на угол α вокруг оси абсцисс и оси аппликат, так что

$$X(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad Z(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Символом $\{a, b, c\}$ обозначена, как обычно, матрица, состоящая из одного столбца.

Равенство (8.4) можно написать так:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ p_z & q_z & r_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (8.5)$$

причем, как нетрудно убедиться, выполнив перемножение трех первых множителей в правой части равенства (8.4),

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ p_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ p_z &= \sin \omega \sin i, \\ q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ q_z &= \cos \omega \sin i, \\ r_x &= \sin i \sin \Omega, \\ r_y &= -\sin i \cos \Omega, \\ r_z &= \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Таковы направляющие косинусы орбитальных осей координат. Если вычисления ведутся при помощи арифмометра, то чаще всего предпочитают находить их не по формулам (8.6), а путем численного перемножения соответствующих матриц.

§ 9. Случай прямолинейного движения

Нам остается рассмотреть тот случай движения, когда вращательный импульс c равен нулю.

Мы уже видели, что движение происходит в этом случае по прямой, имеющей параметрические уравнения (4.8). Радиус-вектор, который в этих уравнениях служит параметром, определяется уравнением (4.9). Введем вместо постоянной энергии h

величину a , определяемую равенством

$$h = -a^{-1}.$$

Тогда это уравнение примет вид

$$\dot{r}^2 = \kappa^2 (2r^{-1} - a^{-1}). \quad (9.1)$$

Таким образом, обозначив через T постоянную интегрирования, имеем

$$\int_0^r \sqrt{\frac{r}{2-ra^{-1}}} dr = \kappa(t - T). \quad (9.2)$$

Если $h=0$, $a=\infty$, то отсюда сразу получаем

$$r = \left(\frac{3\kappa}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} (t - T)^{2/3}. \quad (9.3)$$

Эту зависимость можно униформизировать, по аналогии с параболическим движением, при помощи вспомогательной переменной σ , определяемой равенством $r = \sigma^2$; тогда получим

$$\frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} (t - T). \quad (9.4)$$

Если $h < 0$, $a > 0$, то для выполнения интегрирования в уравнении (9.2) можно ввести переменную E , определяемую равенством

$$r = a(1 - \cos E) \quad (9.5)$$

Это дает

$$E - \sin E = n(t - T), \quad (9.6)$$

где

$$n = \kappa a^{-3/2}.$$

В том случае, когда $h > 0$, $a < 0$, вспомогательная переменная E , униформизирующая зависимость между r и t , становится мнимой. В этом случае можно положить

$$r = |a|(\operatorname{ch} H - 1), \quad (9.7)$$

что дает

$$\operatorname{sh} H - H = \kappa |a|^{-3/2} (t - T). \quad (9.8)$$

Итак, зависимость между r и t в обоих случаях, когда $h < 0$ и когда $h > 0$, получается из соответствующих формул для эллиптического и гиперболического движений, если в них положить $p=0$, а следовательно, $e=1$. Иначе говоря, рассматриваемые случаи прямолинейного движения являются предельными случаями эллиптического или гиперболического движения с тем же значением постоянной энергии, если направление начальной скорости стремится к совпадению с начальным радиусом-вектором.

Заметим, что для вычисления скорости \dot{r} удобно пользоваться следующими легко получаемыми формулами:

$$r\dot{r} = \kappa \sqrt{a} \sin E; \quad r\dot{r} = \kappa \sqrt{-a} \operatorname{sh} H.$$

Рис. 7 представляет графически зависимость между r и t во всех трех случаях.

В случае $h < 0$ эта зависимость, даваемая соотношениями (9.5) и (9.6), изображается циклоидой. Точки возврата циклоиды, имеющие абсциссы t_k , где

$$t_k = T + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (9.9)$$

соответствуют моментам соударений.

При $h = 0$ зависимость выражается уравнением (9.3), которому на рис. 7 соответствует полукубическая парабола.

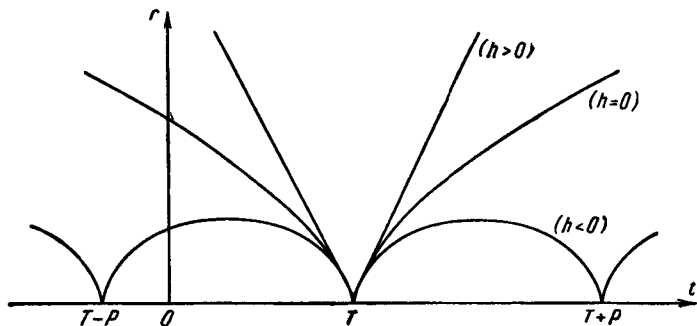


Рис. 7.

Для $h > 0$ кривая, представляемая уравнениями (9.7) и (9.8), имеет только одну точку, в которой $r = 0$. При $t \rightarrow \pm \infty$ эта кривая асимптотически приближается к двум прямым, симметричным относительно прямой $t = T$.

При всех значениях h точечная масса M в момент соударения как бы отскакивает от точечной массы S . Оставаясь в области абстрактных математических понятий, можно сказать, что соударения не прекращают движения. Движение представляется полученными нами формулами для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$, несмотря на наличие соударений в вещественные моменты времени. Можно показать, что прямолинейное движение гиперболического характера (когда $h > 0$) имеет, помимо вещественного соударения при $t = T$, еще соударения, происходящие в комплексные моменты времени.

При каждом соударении скорость обращается в бесконечность. Это непосредственно вытекает из дифференциального

уравнения (9.1). Для $h=0$ поведение радиуса-вектора, а следовательно, и скорости, при приближении к моменту соударения дается соотношением (9.3). В случае $h<0$ исключение переменной E из уравнений (9.5) и (9.6) приводит к разложению,

$$r = \left(\frac{3\kappa}{V^2}\right)^{2/3} (t - t_k)^{2/3} + \sum_{n=3}^{\infty} c_n (t - t_k)^{n/3}, \quad (9.10)$$

которое сходится в области точки $t=t_k$. Если $h>0$, то имеет место аналогичное разложение:

$$r = \left(\frac{3\kappa}{V^2}\right)^{2/3} (t - T)^{2/3} + \sum_{n=3}^{\infty} d_n (t - T)^{n/3}.$$

Таким образом, при приближении к соударению главная часть радиуса-вектора не зависит от постоянной энергии.

Примечание. Случай прямолинейного движения в задаче двух тел приобрел за последнее время практический интерес. С этим случаем мы встречаемся при изучении движения ракеты по нормали к поверхности Земли. В связи с этим были построены специальные таблицы [Херрик, 1953] для удобного пользования формулами (9.5), (9.6) и для квазигиперболического движения формулами (9.7), (9.8). Эти таблицы могут быть использованы и при изучении движения комет.

Положим

$$\left. \begin{aligned} U &= E - \sin E; & C_e(U) &= 1 - \cos E, \\ S_e(U) &= \sin E; & X_e(U) &= E \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

в случае движения эллиптического типа, и

$$\left. \begin{aligned} U &= \operatorname{sh} H - H; & C_h(U) &= \operatorname{ch} H - 1; \\ S_h(U) &= \operatorname{sh} H; & X_h(U) &= H \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

— в случае движения гиперболического типа.

Указанные таблицы дают функции C , S и X по аргументу U . Это позволяет удобно решать все задачи, связанные с прямолинейным движением.

§ 10. Законы Кеплера

Полученные в предыдущих параграфах результаты позволяют выяснить полностью связь между законом тяготения и эмпирическими закономерностями в планетных движениях, которые были найдены Кеплером и которые привели Ньютона к открытию закона тяготения.

В первом приближении мы можем пренебречь силами, с которыми планеты действуют друг на друга, и рассматривать