уравнения (9.1). Для $h=0$ поведение радиуса-вектора, а следовательно, и скорости, при приближении к моменту соударения дается соотношением (9.3). В случае $h<0$ исключение переменной E из уравнений (9.5) и (9.6) приводит к разложению,

$$r=\left(\frac{3\varkappa}{\sqrt{2}}\right)^{2/3}(t-t_k)^{2/3}+\sum_{n=3}^{\infty} c_n (t-t_k)^{n/3}, \tag{9.10}$$

которое сходится в области точки $t=t_k$. Если $h>0$, то имеет место аналогичное разложение:

$$r=\left(\frac{3\varkappa}{\sqrt{2}}\right)^{2/3}(t-T)^{2/3}+\sum_{n=3}^{\infty} d_n (t-T)^{n/3}.$$

Таким образом, при приближении к соударению главная часть радиуса-вектора не зависит от постоянной энергии.

Примечание. Случай прямолинейного движения в задаче двух тел приобрел за последнее время практический интерес. С этим случаем мы встречаемся при изучении движения ракеты по нормали к поверхности Земли. В связи с этим были построены специальные таблицы [Херрик, 1953] для удобного пользования формулами (9.5), (9.6) и для квазигиперболического движения формулами (9.7), (9.8). Эти таблицы могут быть использованы и при изучении движения комет.

Положим

$$\left.\begin{aligned} &U=E-\sin E; && C_e(U)=1-\cos E,\\ &S_e(U)=\sin E; && X_e(U)=E \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

в случае движения эллиптического типа, и

$$\left.\begin{aligned} &U=\operatorname{sh} H-H; && C_h(U)=\operatorname{ch} H-1;\\ &S_h(U)=\operatorname{sh} H; && X_h(U)=H \end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

— в случае движения гиперболического типа.

Указанные таблицы дают функции C, S и X по аргументу U. Это позволяет удобно решать все задачи, связанные с прямолинейным движением.

§ 10. Законы Кеплера

Полученные в предыдущих параграфах результаты позволяют выяснить полностью связь между законом тяготения и эмпирическими закономерностями в планетных движениях, которые были найдены Кеплером и которые привели Ньютона к открытию закона тяготения.

В первом приближении мы можем пренебречь силами, с которыми планеты действуют друг на друга, и рассматривать движение каждой планеты как результат гравитационного взаимодействия этой планеты и Солнца. В этом предположении движение каждой планеты будет подчиняться первому и второму законам Кеплера. В самом деле, в § 2 было показано, что движение происходит в плоскости, проходящей через центр Солнца, а в § 4 — что траектория движения есть эллипс, в фокусе которого находится Солнце.

Закон тяготения дает первый закон Кеплера в обобщенном виде: движение одного небесного тела относительно другого может происходить не только по эллипсу, но и по другим коническим сечениям, в частности, по прямой линии.

Третий закон Кеплера связывает большие полуоси орбит планет с периодами их обращения вокруг Солнца. Чтобы получить зависимость между этими величинами, обратимся к формуле (5.7), дающей среднее движение планеты:

$$n = k\sqrt{m_0 + m}\, a^{-3/2}.$$

Если через P обозначить период обращения планеты, то

$$n = 2\pi/P.$$

Сопоставление этого равенства с предыдущим дает

$$P = \frac{2\pi}{k\sqrt{m_0 + m}}\, a^{-3/2}. \tag{10.1}$$

Для другой планеты с массой m_1, периодом обращения P_1 и большой полуосью a_1, будем иметь аналогичное равенство

$$P = \frac{2\pi}{k\sqrt{m_0 + m_1}}\, a_1^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\frac{P^2}{a^3}\left(1 + \frac{m}{m_0}\right) = \frac{P_1^2}{a_1^3}\left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right). \tag{10.2}$$

Такова исправленная форма третьего закона Кеплера. Поскольку это равенство является прямым следствием соотношения (10.1), оно часто также называется третьим законом Кеплера. Приближенная форма этого закона, найденная эмпирически Кеплером, получается, если в равенстве (10.2) пренебречь отношениями планетных масс к массе Солнца.

Соотношение (10.1) позволяет находить с большой точностью массы планет, имеющих спутников. В самом деле, пусть m — масса такой планеты, a и P — элементы ее орбиты. Обозначим через m' массу ее спутника, а через a' и P' — элементы орбиты, описываемой спутником вокруг планеты. Тогда, кроме равенства (10.1), мы будем иметь еще и такое:

$$P' = \frac{2\pi}{k\sqrt{m+m'}} a'^{3/2},$$

что дает

$$\frac{m+m'}{m_0+m} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2 \left(\frac{a'}{a}\right)^3.$$

Отсюда, пренебрегая исчезающе малым отношением массы спутника к массе Солнца, получим массу планеты, выраженную в частях массы Солнца.

§ 11. Астрономическая система единиц

При изучении движений небесных тел приходится пользоваться особой системой единиц, так как применяемые в физике единицы длины и массы оказываются здесь непригодными. Дело в том, что отношения расстояний между небесными телами мы можем измерять с относительной точностью, доходящей в некоторых случаях до 10^{-8}, однако выразить эти расстояния в сантиметрах мы можем лишь с точностью, не превышающей 10^{-3}, поскольку пересчет в сантиметры основан на величине солнечного параллакса, который известен нам с ошибкой именно такого порядка. Аналогично дело обстоит и с массами небесных тел: мы знаем с гораздо большей точностью их отношения, нежели значения в граммах.

Это привело к употреблению астрономической системы единиц, в которой за единицу длины была принята большая полуось земной орбиты *), за единицу масс — масса Солнца, а за единицу времени — средние солнечные сутки.

Чтобы применить эту систему единиц при изучении движений небесных тел, нужно найти соответствующее ей значение постоянной тяготения. Для этого можно воспользоваться формулой (10.1), дающей

$$k = \frac{2\pi a^{3/2}}{P\sqrt{m_0+m}}, \tag{11.1}$$

где $m_0 = 1$.

Целесообразнее всего применить эту формулу к Земле, так как в этом случае $a = 1$ известно совершенно точно, а период обращения известен точнее, нежели для какой-либо другой планеты.

В своем знаменитом трактате Theoria motus corporum coelestium Гаусс принял [Гаусс, 1809]:

$P = 365,2563835$ ср. солн. суток, $m = 1/354\,710$,

*) Точнее, большая полуось орбиты, описываемой вокруг Солнца центром инерции системы, состоящей из Земли и Луны.