равенства (10.1), мы будем иметь еще и такое:

$$P' = \frac{2\pi}{k\sqrt{m+m'}} a'^{3/2},$$

что дает

$$\frac{m+m'}{m_0+m} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2 \left(\frac{a'}{a}\right)^3.$$

Отсюда, пренебрегая исчезающе малым отношением массы спутника к массе Солнца, получим массу планеты, выраженную в частях массы Солнца.

§ 11. Астрономическая система единиц

При изучении движений небесных тел приходится пользоваться особой системой единиц, так как применяемые в физике единицы длины и массы оказываются здесь непригодными. Дело в том, что отношения расстояний между небесными телами мы можем измерять с относительной точностью, доходящей в некоторых случаях до 10^{-8}, однако выразить эти расстояния в сантиметрах мы можем лишь с точностью, не превышающей 10^{-3}, поскольку пересчет в сантиметры основан на величине солнечного параллакса, который известен нам с ошибкой именно такого порядка. Аналогично дело обстоит и с массами небесных тел: мы знаем с гораздо большей точностью их отношения, нежели значения в граммах.

Это привело к употреблению астрономической системы единиц, в которой за единицу длины была принята большая полуось земной орбиты *), за единицу масс — масса Солнца, а за единицу времени — средние солнечные сутки.

Чтобы применить эту систему единиц при изучении движений небесных тел, нужно найти соответствующее ей значение постоянной тяготения. Для этого можно воспользоваться формулой (10.1), дающей

$$k = \frac{2\pi a^{3/2}}{P\sqrt{m_0+m}}, \tag{11.1}$$

где $m_0 = 1$.

Целесообразнее всего применить эту формулу к Земле, так как в этом случае $a = 1$ известно совершенно точно, а период обращения известен точнее, нежели для какой-либо другой планеты.

В своем знаменитом трактате Theoria motus corporum coelestium Гаусс принял [Гаусс, 1809]:

$$P = 365,2563835 \text{ ср. солн. суток}, \quad m = 1/354\,710,$$

*) Точнее, большая полуось орбиты, описываемой вокруг Солнца центром инерции системы, состоящей из Земли и Луны.

что дало

$$k = 0{,}017\,202\,098\,95. \tag{11.2}$$

Эта величина употреблялась в течение XIX в. во всех астрономических вычислениях и легла в основу наиболее фундаментальных таблиц. Поэтому, когда выяснилось, что принятые Гауссом значения P и m нуждаются в исправлении, предпочли оставить без изменения значение, найденное Гауссом для k, и изменить соответствующим образом единицу длины. При таком условии большая полуось земной орбиты уже не равняется единице, а получается по формуле

$$a = \left(\frac{kP\sqrt{1+m}}{2\pi}\right)^{2/3}.$$

Такой выбор системы единиц был окончательно узаконен постановлением Международного Астрономического Союза в 1938 г.

В настоящее время наилучшими значениями продолжительности сидерического года и массы Земли (точнее, массы системы, состоящей из Земли и Луны) можно считать такие:

$$P = 365{,}256\,36042 \quad (\text{для } 1900{,}0),$$

$$m = 1/328912 \text{ [Труды Межд. Астрон. Союза, 1964].}$$

Сообразно с этим большая полуось земной орбиты получается равной

$$a = 1{,}000\,000\,032 \text{ астр. единиц.} \tag{11.3}$$

Единица времени была несколько уточнена постановлениями, принятыми на съездах Международного Астрономического Союза, происходивших в 1948, 1952, 1955 и 1958 годах. Было признано необходимым во всех случаях, когда нужна большая точность, основывать измерение времени не на периоде вращения Земли, а на периоде обращения Земли вокруг Солнца.

Окончательно современная астрономическая система единиц фиксируется следующими тремя положениями:

1. За единицу массы принимается масса Солнца.

2. За единицу времени принимается продолжительность средних солнечных суток, равная 86 400 секундам эфемеридного времени. Секунда эфемеридного времени определяется как 1/315 569 25975 часть тропического года эпохи 1900, январь, 0, в 12^h эфемеридного времени.

3. Для постоянной тяготения k^2 фиксируется значение, соответствующее константе Гаусса (11.2).

Отметим следующие часто употребляемые величины

$$k = 0{,}017\ 202\ 098\ 950\ 000,$$
$$k^0 = 0^\circ{,}985\ 607\ 668\ 601\ 425,$$
$$k'' = 3548'',187\ 606\ 965\ 130,$$
$$\lg k^\circ = 8{,}235\ 581\ 441\ 488\ 214_{-10},$$
$$\lg k^\circ = 9{,}993\ 704\ 073\ 897\ 396_{-10},$$
$$\lg k'' = 3{,}550\ 006\ 574\ 664\ 673.$$

Зная размеры Земли и параллакс Солнца, можно астрономическую единицу длины выразить в сантиметрах. Она получается равной

$$\rho_0/a \sin p_\odot,$$

где ρ_0 — экваториальный радиус Земли, a дается равенством (11.3), а через $p_\odot$ обозначен экваториальный горизонтальный параллакс Солнца. Принимая $\rho_0 = 6\,378\,16000$ *см* (эллипсоид Межд. Астрон. Союза) и $p_\odot = 8'',79405$, получим

$$1 \text{ астр. единица} = 1{,}4960000 \times 10^{13} \text{ см}.$$

Постоянная тяготения $f = k^2$ связана с величинами, поддающимися измерению, тремя различными путями: с результатами астрономических наблюдений ее связывает формула (11.1); сила тяжести, измеряемая на поверхности Земли, пропорциональна этой постоянной; наконец, эту постоянную можно найти из опытов над взаимным притяжением двух тел с известными массами. Сопоставление того, что дают эти различные пути, приводит к весьма важным результатам.

Зависимость между параллаксом Солнца и массой Земли

Изучение движения искусственных спутников Земли позволило определить следующее значение величины $fm_\oplus$ (с которой мы уже встречались в § 5 гл. I):

$$fm_\oplus = 3{,}98603 \times 10^{20}, \tag{11.4}$$

где f и масса Земли $m_\oplus$ выражены в системе CGS.

Выразим величины, входящие в равенство (11.1), в единицах CGS. После возведения в квадрат это равенство можно представить так:

$$f(m_0 + m) = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 a^3, \tag{11.5}$$

где

$$2\pi/P = 2\pi/(365{,}25636042 \times 86\,400)$$

есть среднее движение Земли в одну секунду; большая полуось земной орбиты выражена через экваториальный радиус Земли и параллакс Солнца:

$$a = 6\,378\,16000/\sin p_{\odot};$$

через $m_0 + m = m_{\odot} + m_{\oplus} + m_{☾}$ обозначена сумма масс Солнца, Земли и Луны.

Положив, как обычно, $\sin p_{\odot} = p''_{\odot} \operatorname{arc} 1''$ и исключив из равенств (11.4) и (11.5) постоянную тяготения f, будем иметь

$$\left(\frac{m_{\odot} + m_{\oplus} + m_{☾}}{m_{\oplus}}\right)^{1/3} p''_{\odot} = 609'',517.$$

Так как

$$m_{\oplus} + m_{☾} = (1 + \mu)\, m_{\oplus},$$

где $\mu = 1/81{,}30$, то полученное соотношение можно еще написать как

$$\left(\frac{1 + m_з}{m_з}\right)^{1/3} p''_{\odot} = 607'',038, \qquad (11.6)$$

если через $m_з$ обозначить сумму масс Земли и Луны, выраженную в частях массы Солнца.

Если в сделанных нами вычислениях взять $\rho_0 = 6378\,38800$ *см*, т. е. заменить земной эллипсоид МАС эллипсоидом Хейфорда, то стоящая справа величина будет равна 607″,060.

Для величины параллакса Солнца 8″,79405, принятой в настоящее время, формула (11.6) дает $m_з = 1/328912$, а если взять эллипсоид Хейфорда, то $m_з = 1/328953$.

Массы Земли и Солнца

Лабораторные методы нахождения постоянной тяготения дают

$$f = (6{,}670 \pm 0{,}005) \times 10^{-8}. \quad \text{(CGS)}$$

Подставив это значение в равенство (11.4), получим массу Земли в граммах:

$$m_{\oplus} = 5{,}976 \times 10^{27}.$$

Так как объем Земли равен $1{,}083\,320 \times 10^{27}$ *см*³ (по Хейфорду), то средняя плотность Земли получается равной 5,516 *г/см*³.

Сравнение массы Земли, выраженной в граммах, с ее значением в частях солнечной массы, равным 1/332958, показывает, что масса Солнца равна

$$m_{\odot} = 1{,}990 \times 10^{33} \text{ г}.$$