## § 12. Разложение координат в ряды по степеням времени

В предыдущих параграфах было дано точное решение задачи двух тел. В этом решении координаты выражаются неявными и достаточно сложными функциями времени. Между тем при нахождении орбит малых планет и комет из наблюдений весьма важно иметь хотя бы приближенные, но зато простые и явные выражения координат через время. Простейшим путем для получения таких выражений является разложение координат в ряды по степеням времени.

Пренебрегая массой рассматриваемого светила по сравнению с массой Солнца, принятой за единицу, мы можем уравнения гелиоцентрического движения написать так (§ 2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2xu; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2yu; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k^2zu,$$

где для краткости положено

$$u = r^{-3}.$$

Вместо $t$ введем переменную

$$\theta = k(t - t_0),$$

т. е. время, считаемое от выбранного нами начального момента и выраженное в единицах, равных $1/k = 58{,}13244\ldots$ суток. Тогда, условившись обозначать штрихами производные по $\theta$, уравнения движения будем иметь в таком виде:

$$x'' = -xu; \quad y'' = -yu; \quad z'' = -zu. \tag{12.1}$$

Для малых значений $\theta$, которые только и встречаются при вычислении орбит из наблюдений, мы можем, пользуясь основной теоремой Коши, получить решение системы (12.1) в форме степенных рядов, расположенных по степеням $\theta$. В самом деле, поскольку случай прямолинейного движения нами исключается, при $\theta = 0$ радиус-вектор $r$ не может быть равен нулю; поэтому правые части уравнений (12.1) являются голоморфными функциями в точке $\theta = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$

Таким образом, ряд

$$x = x_0 + x_0'\theta + \frac{1}{2!}x_0''\theta^2 + \ldots \tag{12.2}$$

и аналогичные ряды для двух других координат сходятся для достаточно малых по абсолютной величине значений $\theta$.

Чтобы найти коэффициенты этих рядов, продифференцируем почленно уравнения (12.1) и положим затем $\theta = 0$. Тогда получим:

$$x_0'' = -x_0 u_0,$$
$$x_0''' = -x_0 u_0' - x_0' u_0,$$
$$x_0^{IV} = -x_0 (u_0'' - u_0^2) - 2x_0' u_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Подстановка этих выражений в ряд (12.2) и аналогичные ему дает

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 F(\theta) + x_0' G(\theta), \\ y &= y_0 F(\theta) + y_0' G(\theta), \\ z &= z_0 F(\theta) + z_0' G(\theta), \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F(\theta) &= 1 - \frac{1}{2} u_0 \theta^2 - \frac{1}{6} u_0' \theta^3 - \frac{1}{24}(u_0'' - u_0^2)\theta^4 - \ldots, \\ G(\theta) &= \theta - \frac{1}{6} u_0 \theta^3 - \frac{1}{12} u_0' \theta^4 + \frac{1}{120}(u_0^2 - 3u_0'')\theta^5 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

Заметим, что при помощи найденного в §§ 5—7 решения задачи двух тел можно функции $F(\theta)$ и $G(\theta)$ выразить в конечном виде. Воспользуемся тем, что эти функции не зависят от выбора координатной системы. Мы можем поэтому считать, что координатная система совпадает с орбитальной. Но тогда, взяв случай эллиптического движения и обозначив через $E$ и $E_0$ соответствующие эксцентрические аномалии, будем иметь

$$x = a(\cos E - e); \qquad x_0 = a(\cos E_0 - e);$$
$$y = a\sqrt{1-e^2}\sin E; \qquad y_0 = a\sqrt{1-e^2}\sin E_0;$$
$$z = 0, \qquad z_0 = 0,$$
$$x_0' = -a \sin E_0 \cdot E_0',$$
$$y_0' = a\sqrt{1-e^2}\cos E_0 \cdot E_0',$$
$$z_0' = 0.$$

Подставляя эти значения в равенства

$$F(\theta) = \frac{xy_0' - yx_0'}{x_0 y_0' - y_0 x_0'}; \qquad G(\theta) = \frac{yx_0 - xy_0}{x_0 y_0' - y_0 x_0'},$$

непосредственно вытекающие из (12.3), и замечая, что

$$E_0' = a^{-3/2}(1 - e\cos E_0)^{-1},$$

получим

$$\left.\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{\cos(E-E_0) - e\cos E_0}{1 - e\cos E_0}, \\ G(\theta) &= a^{3/2}\left[\sin(E-E_0) - e(\sin E - \sin E_0)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

Полагая

$$2f = v - v_0; \quad 2g = E - E_0,$$

где $v$ и $v_0$ — истинные аномалии в моменты $t$ и $t_0$, можно эти формулы представить в такой форме:

$$F(\theta) = 1 - \frac{2a}{r_0}\sin^2 g; \quad G(\theta) = 2\sqrt{arr_0}\cos f \sin g. \tag{12.6}$$

Легко видеть, какие изменения нужно сделать в этих выражениях для случая гиперболического движения. Если движение происходит по параболе, то (§ 8)

$$\begin{aligned} x &= q(1-\sigma^2); & x_0 &= q(1-\sigma_0^2); & x_0' &= -2q\sigma_0\sigma_0' \\ y &= 2q\sigma; & y_0 &= 2q\sigma_0; & y_0' &= 2q\sigma_0', \end{aligned}$$

причем

$$\sqrt{2}\,\sigma_0' = q^{-3/2}\left(1+\sigma_0^2\right)^{-1}.$$

Это дает

$$\left.\begin{aligned} F(\theta) &= \left(1 + 2\sigma\sigma_0 - \sigma^2\right)\left(1+\sigma_0^2\right)^{-1}, \\ G(\theta) &= \sqrt{2}\,q^{3/2}(\sigma-\sigma_0)(1+\sigma\sigma_0). \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

*Примечание.* Употребляя прн вычислении орбнт разложения (12.4), в них берут только по два или по три первых члена. Учет следующих членов, содержащих вторые и высшие производные радиуса-вектора, слишком усложнил бы вычисления. О степени аппроксимирования функций $F$ и $G$, даваемого первыми членами, можно судить по области сходимости рядов (12.4). В следующем параграфе будут рассмотрены особые точки функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определяемых дифференциальными уравнениями (12.1). Расположенне этих особых точек на плоскости комплексного переменного $t$ определяет область сходимости разложений (12.4).

## § 13. Соударения в задаче двух тел

Мы уже видели, что в случае прямолинейного движения существуют вещественные моменты соударений (§ 9). В случае движения по коническому сечению соударения также происходят, но, как будет показано в этом параграфе, они имеют место только в комплексные моменты времени. Тем не менее, изучение соударений представляет интерес и в этом случае. Действительно, моменты, в которые $r=0$, являются, очевидно, единственными особыми точками дифференциальных уравнений (2.1), определяющих движение. Поэтому расположение моментов соударений в плоскости комплексной переменной $t$ непосредственно