

получим

$$\left. \begin{aligned} F(\theta) &= \frac{\cos(E - E_0) - e \cos E_0}{1 - e \cos E_0}, \\ G(\theta) &= a^{3/2} [\sin(E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Полагая

$$2f = v - v_0; \quad 2g = E - E_0,$$

где v и v_0 — истинные аномалии в моменты t и t_0 , можно эти формулы представить в такой форме:

$$F(\theta) = 1 - \frac{2a}{r_0} \sin^2 g; \quad G(\theta) = 2 \sqrt{arr_0} \cos f \sin g. \quad (12.6)$$

Легко видеть, какие изменения нужно сделать в этих выражениях для случая гиперболического движения. Если движение происходит по параболе, то (§ 8)

$$x = q(1 - \sigma^2); \quad x_0 = q(1 - \sigma_0^2); \quad x'_0 = -2q\sigma_0\sigma'_0$$

$$y = 2q\sigma; \quad y_0 = 2q\sigma_0; \quad y'_0 = 2q\sigma'_0,$$

причем

$$\sqrt{2} \sigma'_0 = q^{-3/2} (1 + \sigma_0^2)^{-1}.$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} F(\theta) &= (1 + 2\sigma\sigma_0 - \sigma^2)(1 + \sigma_0^2)^{-1}, \\ G(\theta) &= \sqrt{2} q^{3/2} (\sigma - \sigma_0)(1 + \sigma_0). \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Примечание. Употребляя при вычислении орбит разложения (12.4), в них берут только по два или по три первых члена. Учет следующих членов, содержащих вторые и высшие производные радиуса-вектора, слишком усложнил бы вычисления. О степени аппроксимирования функций F и G , даваемого первыми членами, можно судить по области сходимости рядов (12.4). В следующем параграфе будут рассмотрены особые точки функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определяемых дифференциальными уравнениями (12.1). Расположение этих особых точек на плоскости комплексного переменного t определяет область сходимости разложений (12.4).

§ 13. Соударения в задаче двух тел

Мы уже видели, что в случае прямолинейного движения существуют вещественные моменты соударений (§ 9). В случае движения по коническому сечению соударения также происходят, но, как будет показано в этом параграфе, они имеют место только в комплексные моменты времени. Тем не менее, изучение соударений представляет интерес и в этом случае. Действительно, моменты, в которые $r=0$, являются, очевидно, единственными особыми точками дифференциальных уравнений (2.1), определяющих движение. Поэтому расположение моментов соударений в плоскости комплексной переменной t непосредственно

связано с изучением областей сходимости рядов, представляющих движение.

Эллиптическое движение. Так как моменты соударений определяются условием $r=0$, а зависимость между r и t в рассматриваемом случае устанавливается формулами (5.4) и (5.6), то моменты соударений можно получить путем исключения E из уравнений:

$$1 - e \cos E = 0, \quad (13.1)$$

$$E - e \sin E = n(t - T). \quad (13.2)$$

Первое из этих уравнений дает значения E , соответствующие искомым моментам, а именно:

$$E_k = 2k\pi + i\alpha, \quad \bar{E}_k = 2k\pi - i\alpha \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (13.3)$$

где

$$\alpha = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}.$$

Так как отсюда следует, что

$$\sin E_k = i \sqrt{e^{-2} - 1},$$

то для моментов соударений получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_k &= T + kP + \frac{i}{n} \beta, \\ \bar{\tau}_k &= T + kP - \frac{i}{n} \beta, \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

где для краткости положено:

$$\beta = \alpha - \sqrt{1 - e^2}; \quad P = \frac{2\pi}{n}.$$

Итак, в случае эллиптического движения все моменты соударений лежат на двух прямых, параллельных вещественной оси комплексной переменной t и симметрично расположенных относительно этой оси (рис. 8).

При изменении e от 0 до 1 функция $\beta(e)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0. Таким образом, при круговом движении, когда $e=0$, соударения отсутствуют, ибо все точки (13.4) уходят в бесконечность. Напротив, при прямолинейном движении, когда $e=1$, моменты соударений попарно сливаются и становятся вещественными. В этом случае они совпадают со значениями, даваемыми формулами (9.9).

Если уравнение (13.2) написать в форме

$$f(E, t) = 0,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial E} = 1 - e \cos E; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} = e \sin E; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial E^3} = e \cos E.$$

При $e < 1$ только первая из этих производных обращается в нуль в точках (13.3). Если же $e = 1$, то и вторая производная равна нулю, но третья производная отлична от нуля. Отсюда видно, что при $e < 1$ каждый из моментов соударений является точкой разветвления первого порядка функции $E(t)$, определяемой уравнением (13.2); при $e = 1$ точки $\tau_k = \bar{\tau}_k$ являются для этой функции точками разветвления второго порядка.

Легко видеть, что других конечных особых точек, кроме (13.4), функция $E(t)$ не имеет. Это следует из того, что во всех других точках ее производная

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E}$$

имеет определенное конечное значение, а потому функция $E(t)$ голоморфна.

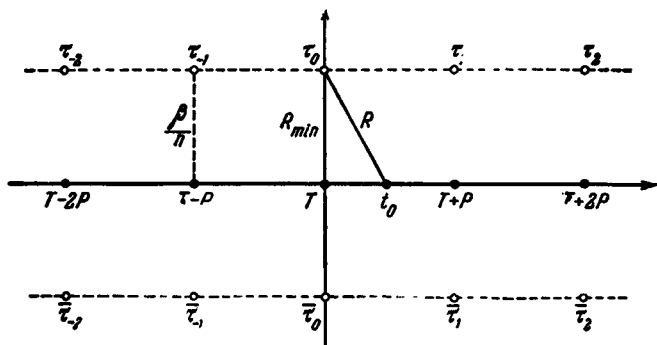


Рис. 8.

Так как координаты x , y , z , определяющие положение тела M , являются голоморфными функциями E (§ 8), то и эти координаты никаких других особых точек, кроме (13.4), не имеют.

Характер особых точек функции $E(t)$ может быть установлен иначе. Разложение левой части уравнения (13.2) в ряд позволяет написать это уравнение так:

$$n(t - \tau_k) = \frac{i\sqrt{1-e^2}}{2!} (E - E_k)^2 + \frac{1}{3!} (E - E_k)^3 - \frac{i\sqrt{1-e^2}}{4!} (E - E_k)^4 - \dots \quad (13.5)$$

Отсюда, полагая для краткости

$$\theta_k = \sqrt{n(t - \tau_k)}; \quad m = \sqrt[4]{1 - e^2},$$

получим разложение

$$E - E_k = \frac{1-i}{m} \theta_k + \frac{1}{3m^3} \theta_k^2 + \frac{1+i}{18m^7} \theta_k^3 + \dots, \quad (13.6)$$

сходящееся для достаточно малых по абсолютной величине значений θ_k . Заменяя в равенстве (13.6) i на $-i$, будем иметь разложение функции $E(t)$ в области сопряженной точки $\bar{\tau}_k$. Эти разложения показывают, что при $e < 1$ особые точки (13.4) являются точками разветвления первого порядка.

Если $e = 1$, то обращение ряда (13.5) дает

$$E - E_k = [6n(t - \tau_k)]^{1/3} + \dots,$$

что приводит к разложению (9.10) для радиуса-вектора. Таким образом, при слиянии каждой пары точек разветвления первого порядка мы получаем точку разветвления второго порядка.

Назовем главной ветвью бесконечно многозначной функции $E(t)$ ту ветвь, которая определяется начальным значением $E(T) = 0$. Легко видеть, что все точки (13.4) являются особыми для главной ветви функции $E(t)$. Отсюда следует, что каждая из этих точек является особой, помимо главной ветви, еще только для одной из других ветвей. Иначе говоря, схема соединения листов римановой поверхности функции $E(t)$ вдоль прямой, проходящей через точки τ_k , имеет вид, изображенный на рис. 9. Такой же характер имеет структура римановой поверхности вдоль прямой, проходящей через точки $\bar{\tau}_k$.

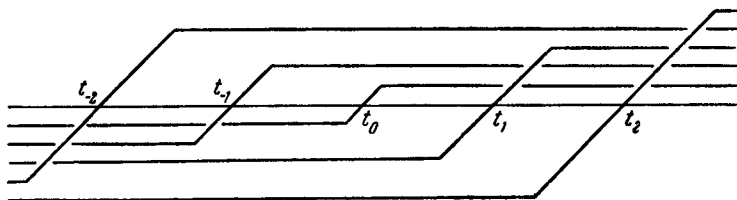


Рис. 9.

Чтобы доказать принадлежность любой особой точки τ_k (или $\bar{\tau}_k$) главной ветви, достаточно убедиться в том, что аналитическое продолжение главной ветви дает в точке τ_k значение $E(\tau_k) = E_k$. С этой целью будем вести аналитическое продолжение от начального элемента, определяемого значениями $t = T$, $E = 0$, сначала вдоль вещественной оси переменной t до точки $t = T + \frac{2k\pi}{n}$. В эту точку мы придем с вещественным значением $E = 2k\pi$. Дальнейшее аналитическое продолжение будем

производить вдоль отрезка прямой

$$t = T + \frac{2k\pi}{n} + \frac{i}{n} s; \quad 0 \leq s \leq \beta.$$

Пусть

$$E = 2k\pi + \xi + i\eta$$

есть соответствующее значение рассматриваемой функции, так что ξ и η являются вещественными функциями вещественной переменной s , обращающимися в нуль при $s=0$.

Соотношение (13.2) показывает, что $\xi(s)$ и $\eta(s)$ определяются уравнениями

$$\xi - e \sin \xi \operatorname{ch} \eta = 0,$$

$$\eta - e \cos \xi \operatorname{sh} \eta = s.$$

Первое из этих уравнений на плоскости (ξ, η) представляет прямую $\xi=0$ и некоторую кривую, не проходящую через начало координат. Поэтому функция $\xi(s)$ должна быть тождественно равна нулю, а для определения $\eta_1 = \eta(\beta)$ имеем уравнение

$$\eta_1 - e \operatorname{sh} \eta_1 = \beta. \quad (13.7)$$

Так как

$$\beta = \alpha - \sqrt{1 - e^2} = \alpha - e \operatorname{sh} \alpha,$$

то уравнение (13.7) имеет решение

$$\eta_1 = \eta(\beta) = \alpha.$$

Единственность этого решения следует из того, что производная

$$\frac{ds}{d\eta} = 1 - e \operatorname{ch} \eta$$

положительна при $0 \leq \eta < \alpha$ и отрицательна при $\eta > \alpha$; при $\eta = \alpha$ она равна нулю.

Отсюда ясно, что аналитическое продолжение главной ветви дает $E(\tau_k) = E_k$, что и требовалось доказать.

Гиперболическое движение. Формулы (6.2) и (6.3) показывают, что в этом случае для получения моментов соударений нужно из уравнений

$$e \operatorname{ch} H - 1 = 0, \quad (13.8)$$

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - T) \quad (13.9)$$

исключить параметр H .

Первое из этих уравнений дает значения параметра в моменты соударений:

$$\left. \begin{aligned} H_k &= i(2k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}); \\ \bar{H}_k &= -i(2k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}). \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

Второе уравнение дает для моментов соударений такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_h &= T + \frac{i}{n} (\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1} - 2k\pi), \\ \bar{\tau}_h &= T - \frac{i}{n} (\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1} - 2k\pi), \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

ибо

$$\operatorname{sh} H_h = i \sqrt{1 - e^{-2}}. \quad (13.12)$$

Чтобы выяснить, какой характер имеют точки (13.11) для функции $H(t)$, определяемой уравнением (13.9), напомним это уравнение так:

$$f(H, t) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial H} = e \operatorname{ch} H - 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial H^2} = e \operatorname{sh} H; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial H^3} = e \operatorname{ch} H.$$

Отсюда ясно, учитывая (13.8) и (13.12), что при $e > 1$ все точки (13.11) являются точками разветвления первого порядка; если же $e = 1$, то это будут точки разветвления второго порядка.

Моменты соударений (13.11) лежат на прямой, проходящей через точку $t = T$ и перпендикулярной к вещественной оси. Эти моменты являются комплексными, за одним только исключением: для значений эксцентриситета $e = e_h$ ($h = 0, 1, 2, \dots$), определяемых уравнением

$$\sqrt{e_h^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e_h^2 - 1} - 2h\pi = 0,$$

вместо двух комплексных моментов τ_h и $\bar{\tau}_h$ формулы (13.11) дают только один вещественный момент $t = T$.

Из последнего уравнения находим

$$e_0 = 1; \quad e_1 = 7,782 \dots; \quad e_2 = 198,8 \dots; \dots$$

При $e = 1$, т. е. в случае прямолинейного движения, точки разветвления первого порядка τ_0 и $\bar{\tau}_0$ действительны, они сливаются и дают точку разветвления второго порядка T , уже изученную в § 9. Заметим, что в этом случае формулы (13.11) дают, кроме момента соударения $t = T$, еще бесчисленное множество комплексных моментов соударений.

Если $e = e_h$, где $h = 1, 2, \dots$, то моменты τ_h и $\bar{\tau}_h$ не сливаются, ибо, как мы уже видели, каждый из них остается точкой разветвления первого порядка. Здесь имеет место только наложение двух точек разветвления первого порядка. Это видно, между прочим, из формул (13.10), которые показывают, что значения H_h и \bar{H}_h остаются различными. Таким образом, в точке (T, H_h) римановой поверхности функции $H(t)$ соединяется одна

пара листов этой поверхности, а в точке (T, \bar{H}_h) — другая пара листов.

Важно выяснить, какие из точек (13.11) являются особыми для главной ветви функции $H(t)$, т. е. для той ветви, которая характеризуется начальной точкой $t=T, H=0$.

Пусть точка t движется вдоль прямой

$$t = T + \frac{i}{n} s, \quad (13.13)$$

где s — вещественная величина, возрастающая от значения $s=0$. Если соответствующее значение главной ветви функции $H(t)$ обозначить через

$$H = \xi + i\eta,$$

то ξ и η будут вещественные функции s , обращающиеся в нуль при $s=0$. Эти функции определяются соотношением (13.9), которое дает

$$e \operatorname{sh} \xi \cos \eta - \xi = 0,$$

$$e \operatorname{ch} \xi \sin \eta - \eta = s.$$

Кривая, представляемая первым из этих уравнений, имеет только одну ветвь, а именно $\xi=0$, проходящую через начало координат. Таким образом, $\xi(s) \equiv 0$, а функция $\eta(s)$ определяется уравнением

$$e \sin \eta - \eta = s.$$

Это уравнение показывает, что при возрастании η от нуля до $\operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}$ переменная s монотонно изменяется от нуля до

$$\beta = \sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}.$$

Иначе говоря, аналитическое продолжение главной ветви вдоль прямой (13.13) приводит в точку

$$t = T + \frac{i}{n} \beta; \quad H = \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1},$$

т. е. точка τ_0 (и аналогично $\bar{\tau}_0$) является особой для главной ветви функции $H(t)$.

Имеет ли главная ветвь еще и другие особые точки среди точек, даваемых формулами (13.11)? Этот вопрос не представляет интереса, если ограничиться, как мы это делаем, изучением вещественного движения. Действительно, какую бы точку на вещественной оси переменной t мы ни взяли, всегда τ_0 и $\bar{\tau}_0$ будут ближайшими к ней точками из числа представляемых формулами (13.11).

Параболическое движение. В этом случае

$$r = q(1 + \sigma^2); \quad \sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = n(t - T), \quad (13.14)$$

где

$$n = 2\kappa(2q)^{-3/2}.$$

Условие $r=0$, дающее $\sigma = \pm i$, показывает, что здесь мы имеем только два момента соударения:

$$\tau_0 = T + \frac{2}{3} \frac{i}{n}; \quad \bar{\tau}_0 = T - \frac{2}{3} \frac{i}{n}. \quad (13.15)$$

Каждое из этих значений времени есть, очевидно, точка разветвления первого порядка функции $\sigma(t)$, определяемой уравнением (13.14), причем, как нетрудно убедиться, обе точки (13.15) действительно являются особыми для главной ветви функции $\sigma(t)$, т. е. для той ветви, которая определяется начальными значениями $t=T$, $\sigma=0$. Ясно также, что τ_0 и $\bar{\tau}_0$ — единственные конечные особые точки функции $\sigma(t)$, а следовательно, и координат x , y , z , поскольку эти координаты являются (§ 8) полиномами от σ .

Из всего сказанного в этом параграфе вытекают следующие, важные для дальнейшего, заключения. Оставим в стороне случай прямолинейного движения и ограничимся, как всегда, изучением только вещественного движения, т. е. движения, определяемого главной ветвью одной из функций: $E(t)$, $H(t)$ или $\sigma(t)$ для вещественных значений t . В таком случае единственными особыми точками, представляющими интерес при исследовании областей сходимости разложений координат по степеням времени, являются во всех случаях лишь точки τ_0 и $\bar{\tau}_0$.

Действительно, для гиперболического или параболического движения непосредственно ясно, что именно эти точки являются всегда ближайшими к любой точке вещественной оси переменного t . В случае эллиптического движения то же самое будет иметь место для отрезка вещественной оси, определяемого неравенствами

$$-\frac{1}{2}P \leq t - T \leq +\frac{1}{2}P, \quad (13.16)$$

где $P=2\pi/n$ — период обращения. Это ясно из рис. 8.

Таким образом, особые точки, расстояния которых от исходной точки t_0 , лежащей на оси абсцисс, являются наименьшими, во всех случаях даются формулами:

$$\tau_0 = T + \frac{i}{n} \beta(e); \quad \bar{\tau}_0 = T - \frac{i}{n} \beta(e), \quad (13.17)$$

где функция $\beta(e)$ определяется равенствами:

$$\beta(e) = \begin{cases} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} - \sqrt{1 - e^2}, & \text{если } e < 1; \\ 2/3, & \text{если } e = 1; \\ \sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}, & \text{если } e > 1. \end{cases} \quad (13.18)$$

§ 14. Радиус сходимости разложений координат по степеням времени

Обратимся теперь к нахождению радиуса сходимости R разложений координат по степеням $t - t_0$, даваемых формулами (12.3) и (12.4).

Так как радиус сходимости равен расстоянию от точки t_0 до ближайшей особой точки, то результаты предыдущего параграфа дают

$$R = |t_0 - \tau_0|,$$

где τ_0 определяется формулами (13.17) и (13.18).

Наименьшее значение радиус сходимости будет иметь, очевидно, в том случае, когда $t_0 = \bar{T}$. Таким образом, для эллиптического и гиперболического движений

$$R_{\min} = |a|^{3/2} \beta(e)/k,$$

где функция $\beta(e)$ дается формулой (13.18), тогда как для параболического движения

$$R_{\min} = (2q)^{3/2}/3k.$$

Эти минимальные значения радиуса сходимости (выраженные в средних сутках) приведены в таблице 2 для орбит, имеющих одно и то же перигельное расстояние $q=1$, но различные эксцентриситеты.

Для значений t_0 , не совпадающих с моментом прохождения через перигелий, радиус сходимости может быть значительно

Таблица 2

e	R_{\min}	e	R_{\min}	e	R_{\min}
0,0	∞	0,5	74,1	1,0	54,8
0,1	136,1	0,6	68,6	1,1	52,3
0,2	106,7	0,7	64,1	1,2	50,1
0,3	91,3	0,8	60,5	1,3	48,5
0,4	81,3	0,9	57,4	2,0	39,9