где функция $\beta(e)$ определяется равенствами:

$$\beta(e)=\begin{cases} \ln\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{e}-\sqrt{1-e^2}, & \text{если} \quad e<1; \\ 2/3, & \text{если} \quad e=1; \\ \sqrt{e^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^2-1}, & \text{если} \quad e>1. \end{cases} \tag{13.18}$$

§ 14. Радиус сходимости разложений координат по степеням времени

Обратимся теперь к нахождению радиуса сходимости R разложений координат по степеням $t-t_0$, даваемых формулами (12.3) и (12.4).

Так как радиус сходимости равен расстоянию от точки t_0 до ближайшей особой точки, то результаты предыдущего параграфа дают

$$R=|t_0-\tau_0|,$$

где τ_0 определяется формулами (13.17) и (13.18).

Наименьшее значение радиус сходимости будет иметь, очевидно, в том случае, когда $t_0=T$. Таким образом, для эллиптического и гиперболического движений

$$R_{\min}=|a|^{3/2}\beta(e)/k,$$

где функция $\beta(e)$ дается формулой (13.18), тогда как для параболического движения

$$R_{\min}=(2q)^{3/2}/3k.$$

Эти минимальные значения радиуса сходимости (выраженные в средних сутках) приведены в таблице 2 для орбит, имеющих одно и то же перигельное расстояние $q=1$, но различные эксцентриситеты.

Для значений t_0, не совпадающих с моментом прохождения через перигелий, радиус сходимости может быть значительно

Таблица 2

e	$R_{\min}$	e	$R_{\min}$	e	$R_{\min}$
0,0	∞	0,5	74,1	1,0	54,8
0,1	136,1	0,6	68,6	1,1	52,3
0,2	106,7	0,7	64,1	1,2	50,1
0,3	91,3	0,8	60,5	1,3	48,5
0,4	81,3	0,9	57,4	2,0	39,9

больше своего минимального значения. В таблице 3 приведены радиусы сходимости для эллиптической орбиты с большой полуосью, равной 2,65, что близко к средней величине из больших полуосей орбит малых планет. Значения R даны для тех четырех точек орбиты, в которых планета находится в моменты T, $T+\frac{1}{6}P$, $T+\frac{1}{3}P$, $T+\frac{1}{2}P$.

Таблица 3

e	T	$T+\frac{1}{6}P$	$T+\frac{1}{3}P$	$T+\frac{1}{2}P$
0,0	∞	∞	∞	∞
0,1	501,2	553,0	726,0	933,7
0,2	329,3	421,1	620,0	854,0
0,3	230,7	349,6	573,7	821,0
0,4	163,1	302,2	550,1	805,1
0,5	113,0	285,9	537,3	796,0
0,6	74,9	273,1	530,5	791,5
0,7	45,5	266,5	527,3	789,3
0,8	23,4	263,7	525,8	788,4
0,9	7,7	262,7	525,3	788,0
0,95	2,8	262,7	525,2	788,0

Таблица показывает, что при небольших значениях эксцентриситета, обычно встречающихся у малых планет (в среднем у них, как известно, $e=0{,}15$), радиус сходимости измеряется сотнями дней. Он значительно превышает таким образом те интервалы времени между наблюдениями, с которыми приходится иметь дело при нахождении орбит. В дальнейшем (гл. VIII) мы увидим, что чаще всего применяемые методы нахождения орбит основаны как раз на употреблении разложений координат по степеням времени.

Расположение и характер особых точек для случая параболического движения были изучены Гамильтоном (W. A. Hamilton) в 1903 г. В том же году Мультон (F. R. Moulton) нашел расположение особых точек в случаях эллиптического и гиперболического движения, что позволило ему закончить нахождение радиуса сходимости разложений по степеням времени. Аналитический характер особых точек в двух последних случаях был выяснен Шази [1913] и Н. С. Самойловой-Яхонтовой [1927].