ГЛАВА IV

ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПЛАНЕТ И КОМЕТ

§ 1. Вычисление средней и эксцентрической аномалий

Рассмотрим движение светила по эллиптической орбите, определяемой элементами

$$a,\ e,\ M_0,\ \Omega,\ i,\ \omega.$$

Вычисление координат светила, движущегося по этой орбите, для заданного момента времени t начинается с вычисления средней аномалии M. Для этого служит формула

$$M = n(t - t_0) + M_0, \tag{1.1}$$

где

$$n = ka^{-3/2}. \tag{1.2}$$

Чтобы получить среднее суточное движение n в градусах, в этой формуле надо взять значение константы Гаусса в градусах:

$$k^0 = 0°,985\,60767 = [9,993\,7041].$$

Для получения n в секундах дуги надо взять

$$k'' = 3548'',1876 = [3,550\,0066].$$

С точностью, вполне достаточной в обычно встречающихся случаях, переход от n'' к a и обратно удобно выполняется при помощи таблицы III в конце книги. В других случаях можно воспользоваться таблицей XI, дающей $a^{-3/2}$ по аргументу a.

Вычислив среднюю аномалию M, переходим к нахождению эксцентрической аномалии E, определяемой уравнением Кеплера:

$$E - e\sin E = M. \tag{1.3}$$

Если вычисления ведутся при помощи тригонометрических таблиц, у которых аргумент выражен в градусах, минутах и секундах, то в этом уравнении e надо выразить в секундах дуги.

Для этого служит формула

$$e'' = 206\,264'',81 e = [5{,}314\,4251]\, e. \qquad (1.4)$$

Предпочтительнее, однако, вести вычисления в долях градуса, для чего в настоящее время имеется много хороших таблиц. В этом случае эксцентриситет должен быть выражен в градусах:

$$e^\circ = 57^\circ{,}295\,780 e = [1{,}758\,1226]\, e. \qquad (1.5)$$

Если эксцентриситет не очень близок к единице, то решение уравнения (1.3) проще всего выполняется одним из следующих способов.

Способ линейного интерполирования. При помощи таблицы IV находим приближенное значение эксцентрической аномалии, равное E_0, и вычисляем

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0.$$

Взяв затем соседнее значение E_1 такое, чтобы E находилось в интервале (E_0, E_1), вычисляем

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1.$$

Линейное интерполирование дает

$$E = E_1 + (E_0 - E_1) \frac{M - M_1}{M_0 - M_1}. \qquad (1.6)$$

В случае надобности вычисление можно повторить, взяв более тесный интервал.

Пример. Дано:

$$e = 0{,}2453162; \qquad M = 332^\circ{,}48188;$$

требуется найти эксцентрическую аномалию.

Соотношение (1.5) дает $e^\circ = 14^\circ{,}05558$. Из таблицы IV, с приближенными значениями аргументов $e = 0{,}245$ и $M = 332^\circ{,}5$, находим $E_0 = 324^\circ{,}3$.

Таким образом,

$$\begin{array}{rll}
E_0 = 324^\circ{,}30 & E_1 = 324^\circ{,}27 & E = 324^\circ{,}27486 \\
e^\circ \sin E_0 = -8{,}20201 & \quad = -8{,}20799 & \quad = -8{,}20702 \\
M_0 = 332{,}50201 & M_1 = 332{,}47799 & M = 332{,}48188 \\
M_0 - M_1 = +0{,}02402 & M - M_1 = +0{,}00389. &
\end{array}$$

После того как найдено M_0, выбираем подходящее значение для E_1 и делаем вычисление во втором столбце. Формула (1.6) дает

$$E = 324^\circ{,}27 + 0^\circ{,}03 \frac{389}{2402} = 324^\circ{,}27486.$$

Третий столбец показывает, что это значение удовлетворяет уравнению (1.3) со всей нужной точностью.

Способ итерации. Уравнение (1.3) можно написать так:

$$E = M + e \sin E.$$

Условие применимости метода итерации *) здесь выполняется, поскольку

$$\left| \frac{d}{dE}(M + e \sin E) \right| = |e \cos E| \leqslant e < 1.$$

Поэтому, найдя E_0 по таблице IV и вычисляя последовательно

$$E_1 = M + e \sin E_0,$$
$$E_2 = M + e \sin E_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

мы можем быть уверены, что E_n стремится к искомому значению E. Сходимость будет тем лучше, чем меньше $|e \cos E_0|$.

Способ итерации особенно удобен при вычислении на арифмометре. В этом случае можно, установив на результативном счетчике M, а на установочном регистре (клавиатуре) множитель e°, — придать к M величину $e^\circ \sin E_0$. На результативном счетчике будем иметь E_1, что позволяет найти $\sin E_1$ и переделать на счетчике оборотов $\sin E_0$ в $\sin E_1$; на результативном счетчике появится E_2 и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока на счетчике оборотов не окажется значение $\sin E$, соответствующее тому значению E, которое стоит на результативном счетчике. Важно отметить, что вычисление может быть существенно ускорено, если не стремиться к итеративности процесса, а только к тому, чтобы установить соответствие между E на результативном счетчике и $\sin E$ на счетчике оборотов.

Если эксцентриситет e велик, то при употреблении этого приема целесообразно уравнение (1.3) представить так:

$$\sin E = -\left(\frac{M}{e}\right) + \frac{1}{e} E. \tag{1.7}$$

Здесь метод итерации неприменим. Чтобы видеть это, достаточно положить $x = \sin E$. Но только что указанный прием свободного согласования показаний счетчика оборотов и результативного счетчика при некоторой опытности быстро приводит к цели **).

Чтобы применить этот прием к уравнению (1.7), на результативном счетчике устанавливаем частное M/e (обе величины

*) Это условие заключается, как известно, в следующем: корень α уравнения $x = \varphi(x)$ может быть найден при помощи итерации, если $|\varphi'(\alpha)| < 1$. Сходимость итеративного процесса тем быстрее, чем меньше $|\varphi'(\alpha)|$.

**) Такой прием был впервые предложен Л. Л. Маткевичем, широко использовавшим его в своей многолетней работе по изучению движения кометы Энке (для которой $e = 0{,}84$).

должны быть, конечно, выражены либо в градусах, либо в радианах, смотря по тому, какими таблицами приходится пользоваться); на клавиатуре устанавливаем $1/e$, а на счетчике оборотов получаем исходное значение E_0. На результативном счетчике тогда получится некоторое значение $\sin E_1$. Найдя по таблицам соответствующее ему значение E_1, не совпадающее, вообще говоря, с E_0, изменяем показание счетчика оборотов до тех пор, пока значение E, стоящее на счетчике оборотов, не будет согласно с $\sin E$, стоящим на результативном счетчике.

На других, весьма многочисленных, способах решения уравнения Кеплера здесь нет надобности останавливаться, так как указанные способы вполне обеспечивают это решение во всех тех случаях, когда пользуются эксцентрической аномалией для получения орбитальных координат *).

§ 2. Орбитальные координаты в случае эллиптического движения

Для вычисления прямоугольных орбитальных координат служат формулы

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E = a\cos\varphi\sin E, \qquad (2.1)$$

где $\varphi = \arcsin e$.

Если вычисления ведутся с небольшим числом знаков, то эти координаты могут быть найдены без предварительного вычисления эксцентрической аномалии, при помощи специальных таблиц, дающих величины (их обозначают также через X и Y)

$$C = \cos E - e; \quad S = \sqrt{1-e^2}\sin E \qquad (2.2)$$

по аргументам e и M.

Таблицы Иннеса [1927] дают C и S с пятью десятичными знаками для $M = 0°(1°)180°$ и для $e = 0{,}00(0{,}01)0{,}99$. Таблицы Штракке [1928] дают эти величины с четырьмя десятичными знаками для $M = 0°(1°)180°$ и для $e = 0°(0°10')25°$.

Для вычисления полярных орбитальных координат r и v чаще всего пользуются формулами

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E; \quad r\cos v = a(\cos E - e), \qquad (2.3)$$

или, если употребляется угол эксцентриситета φ,

$$r\sin v = a\cos\varphi\sin E; \quad r\cos v = a(\cos E - \sin\varphi). \qquad (2.4)$$

*) Наиболее полный перечень работ, посвященных решению уравнения Кеплера, содержит статья Вуда [1950]. В ней не упомянута статья А. П. Тяхта [1944], в которой рассматривается вопрос о решении уравнения Кеплера с особенно большой точностью.