Иногда бывают удобны формулы:

$$r=a(1-e\cos E);\quad \operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \quad (2.5)$$

Вторую из этих формул можно, для получения бóльшей точности при том же числе знаков, заменить такой:

$$\sin\frac{1}{2}(v-E)=\sqrt{\frac{a}{r}}\sin\frac{\varphi}{2}\sin E. \quad (2.6)$$

При небольшой точности вычислений (например, при изучении движения двойных звезд, или при составлении поисковых эфемерид планет и комет) можно пользоваться таблицами, позволяющими находить радиус-вектор и истинную аномалию непосредственно по средней аномалии, минуя вычисление эксцентрической аномалии.

Таблицы Титьена [1892] дают $v-M$ с точностью до 0°,01 для всех значений M через 1° и $\varphi=0^\circ(0^\circ20')20^\circ20'$. После нахождения v радиус-вектор вычисляется по формуле

$$r=p/(1+e\cos v).$$

Таблицы Петерса [1912] дают разность $v-M$ с точностью до 0°,01 и $\lg(r/a)$ с четырьмя знаками для $M=0^\circ(1^\circ)180^\circ$ и $\varphi=0^\circ(0^\circ20')24^\circ$.

Предназначенные для двойных звезд таблицы Шлезингера и Удикк [1912] дают v с точностью до 0°,01 для $M=0^\circ(1^\circ)180^\circ$ и $e=0{,}00(0{,}01)0{,}77$.

В таблицах Боке [1920] по аргументам $v=0^\circ(1^\circ)180^\circ$ и $e=0{,}00(0{,}01)0{,}49$ даются значения средней аномалии M с точностью до 0°,001 и значения $\lg(r/a)$ с пятью десятичными знаками. Таблицы для вычисления эфемерид искусственных спутников Земли, составленные И. Д. Жонголовичем и В. М. Амелиным [1960], дают $v-M$ с точностью до 0°,01, а отношение r/a с четырьмя знаками для $M=0^\circ(1^\circ)360^\circ$ и $e=0{,}01(0{,}01)0{,}76$.

§ 3. Орбитальные координаты в случае параболического движения

Если движение происходит по параболе, то орбита определяется пятью элементами: q, T, Ω, i, ω.

Вычисление орбитальных координат для заданного момента t начинается с нахождения параболического аргумента

$$B=q^{-3/2}(t-T). \quad (3.1)$$

Тут можно воспользоваться таблицей XI, которая дает $q^{-3/2}$ по аргументу q. Уравнение (§ 7 гл. III)

$$\sigma+\frac{1}{3}\sigma^3=\frac{k}{\sqrt{2}}B \quad (3.2)$$

дает σ, после чего прямоугольные орбитальные координаты находятся по формулам (§ 8 гл. III)

$$\xi = q(1-\sigma^2); \quad \eta = 2q\sigma, \tag{3.3}$$

а полярные орбитальные координаты при помощи соотношений

$$r = q(1+\sigma^2); \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sigma. \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.2) производится проще всего при помощи специальных таблиц.

Таблица V дает σ для значений B от 0 до 300. Для бо́льших значений B (доходящих до $B=1540$) эта таблица дает B по аргументу σ. Точность соответствует шестизначному вычислению. В тех, крайне редких случаях, когда может понадобиться более точное значение σ, его можно очень легко получить путем исправления (одним из обычных способов) того значения, которое найдено из таблицы V.

В том случае, когда v приближается к 180°, параболический аргумент B и величина σ стремятся к бесконечности, а потому всегда могут выйти за пределы только что рассмотренных таблиц, как бы они ни были обширны. В таких случаях приходится поступать иначе.

Полагая

$$\alpha = \left(\frac{3k}{\sqrt{2}}B\right)^{1/3}; \quad \lg\left(\frac{3k}{\sqrt{2}}\right)^{1/3} = 9{,}5207292328_{-10}, \tag{3.5}$$

напишем уравнение (3.2) следующим образом:

$$\alpha = \sigma(1+3\sigma^{-2})^{1/3},$$

или

$$\sigma = \alpha\beta, \tag{3.6}$$

где поправочный множитель

$$\beta = (1+3\sigma^{-2})^{-1/3} \tag{3.7}$$

в рассматриваемом нами случае близок к единице.

Чтобы выразить β через α, подставим (3.6) в (3.7). Это даст

$$3x\beta + \beta^3 = 1,$$

где $x=\alpha^{-2}$, откуда

$$\beta = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$$

Таблица VI дает $\lg\beta$ для значений x от 0,000 до 0,090. При $x>0{,}069$ уже можно пользоваться таблицей V.

Форма выражений (3.5) и (3.6) такова, что логарифмические вычисления здесь являются более удобными.

Примечание. Для вычисления σ и v могут служить следующие формулы. Считая, что $B>0$, введем величины β и γ, определяемые равенствами

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{3k}{2\sqrt{2}} B; \quad \operatorname{tg}\gamma = \left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)^{1/3}, \tag{3.8}$$

$$(3k/2\sqrt{2} = 0{,}01824\,55812\,2691)$$

и условиями $0<\beta<\pi/2$; $0<\gamma<\pi/2$. Тогда

$$\sigma = 2\operatorname{ctg}2\gamma; \quad v = 180^\circ - (2\gamma + \beta). \tag{3.9}$$

Эти формулы остаются удобно применимыми и для значений v, сколь угодно близких к 180°. Первая из формул (3.9) непосредственно вытекает из тождеств

$$\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{ctg}2\gamma,$$

$$(\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma) + \frac{1}{3}(\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma)^3 = \frac{1}{3}(\operatorname{ctg}^3\gamma - \operatorname{tg}^3\gamma).$$

Вторая из формул (3.9) была открыта недавно (B. Kulaschko, 1944). Она является следствием несколько неожиданного соотношения:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v+\beta) = \frac{\operatorname{tg}^3\gamma - \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma}{1 - (\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma)\operatorname{tg}^3\gamma} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma\,(1 - \operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^4\gamma)}{1 - \operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^4\gamma} = \operatorname{ctg}\gamma.$$

§ 4. Движение по орбите, эксцентриситет которой близок к единице

Орбиты многих комет в той части, которая охватывается наблюдениями, оказываются неотличимыми от параболы. Но чем многочисленнее и точнее делаются наблюдения, тем чаще приходится встречаться с кометами, эксцентриситеты которых хотя и мало, но все же заметно отличаются от единицы.

Легко видеть, что для значений e, очень близких к единице, обычные формулы эллиптического движения

$$E - e\sin E = M, \tag{4.1}$$

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E, \tag{4.2}$$

так же как и соответствующие формулы для гиперболического движения, становятся непригодными для вычисления координат ξ и η (а следовательно, и r, и v).

Действительно, если при некотором постоянном значении перигельного расстояния

$$q = a(1-e) \tag{4.3}$$

эксцентриситет стремится к единице, то $a \to \infty$, $E \to 0$, и выражения (4.2) становятся неопределенными.

Чтобы получить формулы, пригодные для рассматриваемых кометных орбит, преобразуем уравнение (4.1) так, чтобы при