Примечание. Для вычисления σ и v могут служить следующие формулы. Считая, что $B>0$, введем величины β и γ, определяемые равенствами

$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{3k}{2\sqrt{2}}B;\quad \operatorname{tg}\gamma=\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)^{1/3},\tag{3.8}$$

$$(3k/2\sqrt{2}=0{,}01824\,55812\,2691)$$

и условиями $0<\beta<\pi/2$; $0<\gamma<\pi/2$. Тогда

$$\sigma=2\operatorname{ctg}2\gamma;\quad v=180^\circ-(2\gamma+\beta).\tag{3.9}$$

Эти формулы остаются удобно применимыми и для значений v, сколь угодно близких к 180°. Первая из формул (3.9) непосредственно вытекает из тождеств

$$\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{ctg}2\gamma,$$

$$(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma)+\frac{1}{3}(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma)^3=\frac{1}{3}(\operatorname{ctg}^3\gamma-\operatorname{tg}^3\gamma).$$

Вторая из формул (3.9) была открыта недавно (B. Kulaschko, 1944). Она является следствием несколько неожиданного соотношения:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v+\beta)=\frac{\operatorname{tg}^3\gamma-\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma}{1-(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma)\operatorname{tg}^3\gamma}=\frac{\operatorname{ctg}\gamma(1-\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^4\gamma)}{1-\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^4\gamma}=\operatorname{ctg}\gamma.$$

§ 4. Движение по орбите, эксцентриситет которой близок к единице

Орбиты многих комет в той части, которая охватывается наблюдениями, оказываются неотличимыми от параболы. Но чем многочисленнее и точнее делаются наблюдения, тем чаще приходится встречаться с кометами, эксцентриситеты которых хотя и мало, но все же заметно отличаются от единицы.

Легко видеть, что для значений e, очень близких к единице, обычные формулы эллиптического движения

$$E-e\sin E=M,\tag{4.1}$$

$$\xi=a(\cos E-e);\quad \eta=a\sqrt{1-e^2}\sin E,\tag{4.2}$$

так же как и соответствующие формулы для гиперболического движения, становятся непригодными для вычисления координат ξ и η (а следовательно, и r, и v).

Действительно, если при некотором постоянном значении перигельного расстояния

$$q=a(1-e)\tag{4.3}$$

эксцентриситет стремится к единице, то $a\to\infty$, $E\to 0$, и выражения (4.2) становятся неопределенными.

Чтобы получить формулы, пригодные для рассматриваемых кометных орбит, преобразуем уравнение (4.1) так, чтобы при

$e \to 1$ оно переходило в пределе в уравнение

$$\sigma_0 + \frac{1}{3}\sigma_0^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} B; \quad B = q^{-3/2}(t - T), \tag{4.4}$$

соответствующее параболическому движению.

С этой целью перепишем уравнение (4.1) следующим образом:

$$\frac{(1-e)\sin E + E - \sin E}{(1-e)^{3/2}} = kB,$$

или

$$\frac{2\varepsilon \sin E + E - \sin E}{4\varepsilon^{3/2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} B, \tag{4.5}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - e). \tag{4.6}$$

Это равенство можно написать так:

$$\sigma \cos g + \sigma^3 G(g) = \frac{k}{\sqrt{2}} B, \tag{4.7}$$

если положить

$$\sigma = \varepsilon^{-1/2} \sin g; \quad G(g) = \frac{2g - \sin 2g}{4 \sin^3 g}, \tag{4.8}$$

причем $E = 2g$.

Когда $e \to 1$, то $g \to 0$, и потому

$$\cos g \to 1; \quad G(g) \to 1/3.$$

Отсюда следует, что уравнение (4.7) действительно в пределе обратится в (4.4) и что

$$\lim \sigma = \lim (\varepsilon^{-1/2} \sin g) = \sigma_0.$$

Выразим координаты (4.2) через σ. Принимая во внимание (4.8), получим

$$\xi = q(1 - \sigma^2); \quad \eta = 2q\sqrt{1 - \varepsilon}\,\sigma \cos g. \tag{4.9}$$

Уравнения (4.7) и (4.8) должны быть решены относительно σ и g. Вместо g удобно ввести другую вспомогательную неизвестную, а именно,

$$\zeta = \sin^2 g. \tag{4.10}$$

Тогда эти уравнения примут такой вид:

$$\zeta = \varepsilon\sigma^2; \quad \sigma U(\zeta) + \sigma^3 V(\zeta) = B, \tag{4.11}$$

где

$$U(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{k}\sqrt{1 - \zeta}; \quad V(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{k} G(g), \tag{4.12}$$

или, как нетрудно видеть,

$$U(\zeta)=\frac{\sqrt{2}}{k}\left(1-\frac{1}{2}\zeta-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\zeta^2-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\zeta^3-\ldots\right),$$

$$V(\zeta)=\frac{\sqrt{2}}{k}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\frac{1}{2}\zeta+\frac{1}{7}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\zeta^2+\ldots\right).$$

Формулы (4.9) напишутся так:

$$\xi=q(1-\sigma^2);\quad \eta=\sqrt{2}\,kq\sqrt{1-\varepsilon}\,\sigma U(\zeta)=k^2qU(\varepsilon)\cdot\sigma U(\zeta). \tag{4.13}$$

Решение уравнений (4.11) относительно σ и ζ выполняется весьма просто последовательными приближениями, так как ζ очень мало́, а функции (4.12) при малых значениях ζ изменяются медленно. Для первого приближения можно взять $\zeta=0$; тогда уравнения (4.11) обратятся в (4.4) и мы будем иметь $\sigma=\sigma_0$. Это значение можно найти, таким образом, при помощи таблицы V. Для получения более точного значения σ вычислим B_0 по формулам

$$\zeta_0=\varepsilon\sigma_0^2;\quad \sigma_0U(\zeta_0)+\sigma_0^3V(\zeta_0)=B_0.$$

Тогда равенство

$$\sigma-\sigma_0=K(B-B_0), \tag{4.14}$$

где

$$K=\frac{k^2}{2}\frac{U(\zeta_0)}{1+e\sigma_0^2};\quad \frac{k^2}{2}=0{,}00014796=[6{,}17013_{-10}],$$

которое вытекает, на основании (4.8), (4.10) и (4.1), из способа Ньютона для улучшения приближенного значения корня, даст новое, более точное значение σ. Конечно, коэффициент K, вычисленный для первого приближения, может употребляться и во всех дальнейших, если таковые понадобятся.

Можно также, вычислив B_1 для близкого к σ_0 значения σ_1, применить линейное интерполирование.

Все выведенные для эллиптического движения формулы остаются справедливыми и для гиперболического движения (см. § 6, гл. III), но величины E и g становятся в этом случае мнимыми. Поэтому в случае гиперболического движения мы будем иметь

$$\varepsilon<0,\qquad \zeta<0.$$

Таблица VIIb дает семизначные логарифмы функций $U(\zeta)$ и $V(\zeta)$ для значений ζ от $-0{,}20$ до $+0{,}20$.

Если вместо прямоугольных координат ξ и η нужны полярные координаты r и v, то проще всего воспользоваться формулами

$$r=q(1+e\sigma^2);\quad \operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sigma\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1-\zeta}}=\frac{U(\varepsilon)}{U(\zeta)}\sigma, \tag{4.15}$$

которые легко получаются из соотношений (4.3), (4.6), (4.8) и (2.5).

Для контроля можно воспользоваться формулой

$$r = p/(1 + e\cos v); \qquad p = q(1+e).$$

Пример. Дано: $e = 0{,}96764567$, $\lg q = 9{,}7656500$, $t - T = 63{,}54400$; требуется вычислить r и v.

Прежде всего находим

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - e) = 0{,}01617716,$$

$$B = q^{-3/2}(t - T) = 142{,}7577;$$

затем при помощи таблицы V по аргументу B получаем σ для первого приближения.

Вычисления располагаем следующим образом:

$t - T \ldots 1{,}803\,075$

$q\sqrt{q} \ldots 9{,}648\,475$

$B \ldots 2{,}154\,600$

$B = 142{,}7577$

$1 + e\sigma_0^2 = 2{,}3557$

$k^2/2 \ldots 6{,}17013$

$\left(1 + e\sigma_0^2\right)^{-1} \ldots 9{,}62788$

$U(\zeta_0) \ldots 1{,}90996$

$K \ldots 7{,}70797$

$\sigma =$	1,183 66	1,187 732	1,187 722
$\sigma^2 =$	1,401 05	1,410 707	1,410 684
$\zeta =$	0,022 6650	0,022 8212	0,022 8209
$U(\zeta) \ldots$	1,909 955	1,909 921	
$\sigma \ldots$	0,073 227	0,074 719	
$I \ldots$	1,983 182	1,984 640	
$V(\zeta) \ldots$	1,440 791	1,440 812	
$\sigma^3 \ldots$	0,219 681	0,224 156	
$II \ldots$	1,660 472	1,664 968	
$I =$	96,2015	96,5250	
$II =$	45,7585	46,2347	
$B =$	141,9600	142,7597	
$\Delta B =$	+0,7977	−0,0020	
$\Delta B \ldots$	9,90184		
$\Delta\sigma \ldots$	7,60981		
$\Delta\sigma =$	+0,004 072	−0,00010	

$U(\varepsilon) \ldots 1{,}911\,392$ $\qquad q \ldots 9{,}765\,650$

$1/U(\zeta) \ldots 8{,}090\,079$ $\qquad 1 + e\sigma^2 \ldots 0{,}373\,839$

$\sigma \ldots 0{,}074\,715$ $\qquad r \ldots 0{,}139\,489$

$\operatorname{tg}\dfrac{v}{2} \ldots 0{,}076\,186$

$v = 100°0'0'',0$

$e \ldots 9{,}985\,716$

$\cos v \ldots 9{,}239\,670$

$e\cos v \ldots 9{,}225\,386$

$1 + e \ldots 0{,}293\,947$

$p \ldots 0{,}059\,597$

$1 + e\cos v \ldots 0{,}920\,108$

(контроль) $\ldots 0{,}139\,489$

Примечание. Изложенный в этом параграфе метод вычисления координат в случае орбиты, эксцентриснтет которой мало отличается от единицы, был развит Андуайе [1918] и М. Ф. Субботнным [1927]. Среди методов, основанных на сравнении изучаемого движения с параболическим движением, имеющнм те же элементы q и T, он является наиболее простым и требует наименьшего количества вспомогательных таблиц. Действительно, сравнительно очень небольшая таблица значений функции $V(\zeta)$ все равно нужна для других целей, как увиднм дальше (§ 12, гл. V), а без таблицы значений $U(\zeta)$ легко можно было бы обойтись.

В 1945 г. Херрик предложил существенно иной метод. Он основан на сравнении изучаемого эллнптнческого (или гиперболического) движения не с параболическим, а с прямолинейным движением, имеющим ту же величину a.

Соотношения (4.1) н (4.2) дают

$$M = E - \sin E + (1 - e) \sin E,$$

$$\xi = a\,[(1 - e) - (1 - \cos E)]; \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2}\,\sin E.$$

Поэтому, полагая

$$\varepsilon = 1 - e; \qquad S_e(U) = \sin E,$$

$$U = E - \sin E; \quad C_e(U) = 1 - \cos E,$$

будем иметь

$$M = U + \varepsilon S_e; \quad \xi = a\,(\varepsilon - C_e); \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2}\,S_e.$$

Указанные в § 9, гл. III таблицы, дающне S_e и C_e по аргументу U, позволяют удобно решать задачу о нахожденин ξ и η по заданному M при сколь угодно малых значениях ε. Аналогично трактуется случай гиперболического движения.

Такой метод изучения движения в случае, когда e блнзко к единице, базирующийся на соответствующем прямолинейном движении, является теоретически наиболее простым, но он требует специальных, довольно обширных таблиц [Херрнк, 1953].

§ 5. Вычисление эклиптических и экваториальных гелиоцентрических координат

После того как вычислены орбитальные координаты, можно легко найти положение светила как в эклиптической, так и в экваториальной системах координат.

Элементы орбиты i, Ω, ω будем всегда считать отнесенными к эклиптической системе координат $Sx_c y_c z_c$, в которой за основную плоскость принята плоскость эклиптики для какого-либо определенного момента времени, а ось Sx_c направлена в точку весеннего равноденствия для того же момента. Элементы, отнесенные к такой системе координат, будем называть эклиптическими.

Те же самые элементы орбиты, отнесенные к экваториальной системе координат $Sxyz$, в которой основная плоскость есть плоскость экватора, а ось Sx направлена в точку весеннего равноденствия, будем обозначать через i', Ω', ω' и называть экваториальными элементами.