Примечание. Изложенный в этом параграфе метод вычисления координат в случае орбиты, эксцентриснтет которой мало отличается от единицы, был развит Андуайе [1918] и М. Ф. Субботнным [1927]. Среди методов, основанных на сравнении изучаемого движения с параболическим движением, имеющнм те же элементы q и T, он является наиболее простым и требует наименьшего количества вспомогательных таблиц. Действительно, сравнительно очень небольшая таблица значений функции $V(\zeta)$ все равно нужна для других целей, как увиднм дальще (§ 12, гл. V), а без таблицы значений $U(\zeta)$ легко можно было бы обойтись.

В 1945 г. Херрик предложил существенно иной метод. Он основан на сравнении изучаемого эллнптнческого (или гиперболического) движения не с параболическим, а с прямолинейным движением, имеющим ту же величину a.

Соотношения (4.1) н (4.2) дают

$$M = E - \sin E + (1 - e)\sin E,$$

$$\xi = a\,[(1 - e) - (1 - \cos E)]; \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2}\sin E.$$

Поэтому, полагая

$$\varepsilon = 1 - e; \qquad S_e(U) = \sin E,$$

$$U = E - \sin E; \quad C_e(U) = 1 - \cos E,$$

будем иметь

$$M = U + \varepsilon S_e; \quad \xi = a(\varepsilon - C_e); \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2}\,S_e.$$

Указанные в § 9, гл. III таблицы, дающне S_e и C_e по аргументу U, позволяют удобно решать задачу о нахожденин ξ и η по заданному M при сколь угодно малых значениях ε. Аналогично трактуется случай гиперболического движения.

Такой метод изучения движения в случае, когда e блнзко к единице, базирующийся на соответствующем прямолинейном движении, является теоретически наиболее простым, но он требует специальных, довольно обширных таблиц [Херрнк, 1953].

§ 5. Вычисление эклиптических и экваториальных гелиоцентрических координат

После того как вычислены орбитальные координаты, можно легко найти положение светила как в эклиптической, так и в экваториальной системах координат.

Элементы орбиты i, Ω, ω будем всегда считать отнесенными к эклиптической системе координат $Sx_cy_cz_c$, в которой за основную плоскость принята плоскость эклиптики для какого-либо определенного момента времени, а ось Sx_c направлена в точку весеннего равноденствия для того же момента. Элементы, отнесенные к такой системе координат, будем называть эклиптическими.

Те же самые элементы орбиты, отнесенные к экваториальной системе координат $Sxyz$, в которой основная плоскость есть плоскость экватора, а ось Sx направлена в точку весеннего равноденствия, будем обозначать через i', Ω', ω' и называть экваториальными элементами.

Для вычисления эклиптических координат может служить формула (8.4) гл. III, дающая

$$\{x_c, y_c, z_c\} = \boldsymbol{Z}(\Omega)\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{Z}(\omega)\{\xi, \eta, 0\},$$

где

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E. \tag{5.1}$$

Перемножение первых трех множителей в правой части этой формулы дает

$$\{x_c, y_c, z_c\} = \boldsymbol{O}_c \cdot \{\xi, \eta, 0\}, \tag{5.2}$$

где

$$\boldsymbol{O}_c = \boldsymbol{Z}(\Omega)\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{Z}(\omega) = \begin{Vmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ p_z & q_z & r_z \end{Vmatrix}. \tag{5.3}$$

Элементы этой матрицы, которую целесообразно назвать *эклиптической орбитальной матрицей*, даются формулами (8.6) гл. III. Эти элементы представляют собой косинусы углов, образуемых орбитальными осями с осями координат эклиптической системы координат.

Если пользуются орбитальными полярными координатами r и v, то применяются формулы (3.7) гл. III, дающие

$$\left.\begin{aligned} x_c &= r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i), \\ y_c &= r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i), \\ z_c &= r \sin u \sin i, \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

где

$$u = \omega + v.$$

Перейдем теперь к нахождению экваториальных координат. Они связаны с эклиптическими соотношениями

$$\{x, y, z\} = \boldsymbol{X}(\varepsilon)\{x_c, y_c, z_c\}, \tag{5.5}$$

так как эклиптическая система получается из экваториальной вращением на угол ε (наклон эклиптики к экватору) около оси абсцисс.

Соотношения (5.2) и (5.5) дают

$$\{x, y, z\} = \boldsymbol{X}(\varepsilon) \cdot \boldsymbol{O}_c \cdot \{\xi, \eta, 0\}. \tag{5.6}$$

Введя *экваториальную орбитальную матрицу*, определяемую равенством

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{X}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\Omega)\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{Z}(\omega) = \begin{Vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{Vmatrix}, \tag{5.7}$$

можно равенство (5.6) записать так:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix}, \tag{5.8}$$

поскольку третий столбец матрицы (5.7) здесь может быть опущен.

Учитывая выражения (5.1), введем еще следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} A_x = aP_x; \quad A_y = aP_y; \quad A_z = aP_z, \\ B_x = bQ_x; \quad B_y = bQ_y; \quad B_z = bQ_z, \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

где $b = a\sqrt{1-e^2}$. Тогда соотношение (5.8) примет вид

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos E - e \\ \sin E \end{Vmatrix}. \tag{5.10}$$

Векторы $\boldsymbol{P}(P_x, P_y, P_z)$ и $\boldsymbol{Q}\ (Q_x, Q_y, Q_z)$, так же как векторы $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{B} = b\boldsymbol{Q}$, называются **векторными элементами орбиты**. Иногда это название распространяют и на вектор $\boldsymbol{R}\ (R_x, R_y, R_z)$.

Два вектора, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, вполне определяют положение орбиты в пространстве, а следовательно, и элементы i, Ω, ω.

Вычисление компонент единичных векторов $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, направленных по орбитальным осям координат, производится обычно путем численного перемножения матриц, стоящих в левой части формулы (5.7). Для контроля употребляются соотношения

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{Q}^2 = \boldsymbol{R}^2 = 1, \quad \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = 0.$$

Явные выражения элементов экваториальной орбитальной матрицы (5.7) нам будут нужны для решения обратной задачи — нахождения элементов орбиты по векторам $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Эти выражения таковы:

$$\left.\begin{aligned}
P_x &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i, \\
P_y &= (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)\cos\varepsilon - \sin\omega\sin i\sin\varepsilon, \\
P_z &= (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)\sin\varepsilon + \sin\omega\sin i\cos\varepsilon, \\
Q_x &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i, \\
Q_y &= (-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)\cos\varepsilon - \cos\omega\sin i\sin\varepsilon, \\
Q_z &= (-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)\sin\varepsilon + \cos\omega\sin i\cos\varepsilon, \\
R_x &= \sin i\sin\Omega, \\
R_y &= -\sin i\cos\Omega\cos\varepsilon - \cos i\sin\varepsilon, \\
R_z &= -\sin i\cos\Omega\sin\varepsilon + \cos i\cos\varepsilon.
\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Чтобы получить выражения P_x, P_y, ..., R_z через экваториальные элементы, нужно в написанных формулах заменить i, Ω, ω через i', Ω', ω' и положить $\varepsilon=0$.

Постоянные Гаусса. Если употребляются полярные орбитальные координаты (что бывает удобно при пользовании логарифмами), то формулам (5.8) можно придать другой вид. Положим

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \sin a \sin(A+\omega); & Q_x &= \sin a \cos(A+\omega), \\ P_y &= \sin b \sin(B+\omega); & Q_y &= \sin b \cos(B+\omega), \\ P_z &= \sin c \sin(C+\omega); & Q_z &= \sin c \cos(C+\omega). \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Этими равенствами и дополнительными условиями

$$\sin a > 0; \quad \sin b > 0; \quad \sin c > 0 \tag{5.13}$$

величины a, b, c, A, B, C, носящие название постоянных Гаусса, определяются вполне однозначно.

Подставив выражения (5.12) в формулы (5.8) и выразив ξ, η через r, v, получим

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin a \sin(A+u), \\ y &= r \sin b \sin(B+u), \\ z &= r \sin c \sin(C+u), \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

где $u=\omega+v$.

Для вычисления постоянных Гаусса можно дать формулы более удобные, нежели (5.12). В самом деле, подстановка выражений (5.4) в соотношение (5.5) дает

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i, \\ y &= r \cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + r \sin u (\cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon), \\ z &= r \cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + r \sin u (\cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon). \end{aligned}$$

Отождествив эти равенства с (5.14), получаем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega, \\ \sin a \cos A &= -\sin \Omega \cos i, \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \varepsilon, \\ \sin b \cos B &= \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon, \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \varepsilon, \\ \sin c \cos C &= \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Отсюда при условиях (5.13) однозначно находятся постоянные Гаусса. Для контроля вычислений можно пользоваться следующими легко выводимыми формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c &= 2, \\ \sin a \cos A \operatorname{tg} i &= \sin b \sin c \sin(C-B). \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

Можно также употреблять для контроля соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 a \sin^2(A+\omega) + \sin^2 b \sin^2(B+\omega) + \sin^2 c \sin^2(C+\omega) &= 1, \\ \sin^2 a \cos^2(A+\omega) + \sin^2 b \cos^2(B+\omega) + \sin^2 c \cos^2(C+\omega) &= 1, \\ \sin^2 a \sin 2(A+\omega) + \sin^2 b \sin 2(B+\omega) + \sin^2 c \sin 2(C+\omega) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

непосредственно вытекающие из равенств (5.12).

Углу ω здесь можно придавать произвольиое значение.

Полезио также иметь в виду, что при $i=0$ имеют место равеиства

$$A=\Omega+90^\circ;\quad B=\Omega;\quad C=\Omega.$$

При малых значениях i оии должны приближеино выполняться.

Формулы, выражающие постоянные Гаусса через экваториальные элементы, будут даны в следующем параграфе.

Нетрудно видеть, что a, b, c суть углы, образованные орбитальной осью $S\zeta$ (перпендикулярной к плоскости орбиты) с экваториальными осями координат.

§ 6. Переход от эклиптических элементов орбиты к экваториальным и обратно

Положение орбиты чаще всего определяется эклиптической системой элементов i, Ω, ω. Но в некоторых случаях приходится пользоваться экваториальными элементами i', Ω', ω'. Чтобы найти эти последние, рассмотрим сферический треугольник, образованный экватором, эклиптикой и орбитой светила. Углы этого треугольника равны i, $180^\circ-i'$ и ε, причем стороны, противолежащие двум первым углам, равны соответственно Ω' и Ω; сторону, противолежащую углу ε, обозначим через d. Очевидно, $d=\omega'-\omega$.

Основные формулы сферической тригонометрии дают

$$\left.\begin{aligned}
\sin i' \sin\Omega' &= \sin i \sin\Omega,\\
\sin i' \cos\Omega' &= \cos i \sin\varepsilon + \sin i \cos\varepsilon \cos\Omega,\\
\cos i' &= \cos i \cos\varepsilon - \sin i \sin\varepsilon \cos\Omega,\\
\sin i' \sin d &= \sin\varepsilon \sin\Omega,\\
\sin i' \cos d &= \sin i \cos\varepsilon + \cos i \sin\varepsilon \cos\Omega,\\
\omega' &= \omega + d.
\end{aligned}\right\}\tag{6.1}$$

Можно воспользоваться также формулами Деламбра:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2} i' \sin\frac{1}{2}(\Omega'+d) &= \cos\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\sin\frac{1}{2}\Omega,\\
\cos\frac{1}{2} i' \cos\frac{1}{2}(\Omega'+d) &= \cos\frac{1}{2}(i+\varepsilon)\cos\frac{1}{2}\Omega,\\
\sin\frac{1}{2} i' \sin\frac{1}{2}(\Omega'-d) &= \sin\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\sin\frac{1}{2}\Omega,\\
\sin\frac{1}{2} i' \cos\frac{1}{2}(\Omega'-d) &= \sin\frac{1}{2}(i+\varepsilon)\cos\frac{1}{2}\Omega,\\
\omega' &= \omega + d.
\end{aligned}\right\}\tag{6.2}$$