§ 9. Движение по орбите, мало наклоненной к эклиптике

Случай, когда наклон орбиты i очень мал, представляет некоторые особенности, на которых следует остановиться. С таким случаем мы встречаемся при изучении движения всех больших планет (исключением можно считать только Плутон, у которого $i=17°$). Среди малых планет этот случай также встречается весьма часто: для 33% известных в настоящее время малых планет наклон орбиты меньше 6°, для 59% он меньше 10°.

Чем ближе к нулю наклон i, тем менее определенным становится положение восходящего узла орбиты. При $i=0$ положение узла становится полностью неопределенным. Вследствие этого долгота восходящего узла Ω находится из наблюдений с ошибкой, неограниченно возрастающей по мере приближения i к нулю.

Чтобы избежать возникающих отсюда неудобств при определении положения перигелия, вместо элемента ω пользуются элементом

$$\pi=\Omega+\omega, \tag{9.1}$$

носящим название д о л г о т ы п е р и г е л и я.

На гелиоцентрической небесной сфере долгота перигелия есть, таким образом, ломанная дуга, измеряемая от точки весеннего равноденствия по эклиптике до восходящего узла, а затем по орбите до перигелия.

Величина

$$w=\pi+v=\Omega+u, \tag{9.2}$$

измеряемая аналогичным образом, называется д о л г о т о й п л а н е т ы в о р б и т е. Она служит в рассматриваемом случае вместо u для фиксирования положения планеты в орбите.

Формулы (5.4), дающие прямоугольные эклиптические координаты, можно написать так:

$$\left.\begin{aligned}
x_c&=r\left[\cos w+2\sin\Omega\sin(w-\Omega)\sin^2\frac{i}{2}\right],\\
y_c&=r\left[\sin w-2\cos\Omega\sin(w-\Omega)\sin^2\frac{i}{2}\right],\\
z_c&=r\sin(w-\Omega)\sin i.
\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Отсюда видно, что погрешность в Ω будет очень мало влиять, при малых значениях i, на координаты, если долгота в орбите w найдена независимо от Ω.

При изучении движения больших планет вместо прямоугольных эклиптических координат x, y, z обычно употребляют соответствующие им полярные эклиптические координаты — радиусвектор r, долготу l и широту b, определяемые равенствами

$$\left.\begin{aligned} x_c &= r\cos b\cos l, \\ y_c &= r\cos b\sin l, \\ z_c &= r\sin b. \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Для вычисления сферических координат l и b вместо этих формул употребляется следующий прием.

Обратимся к прямоугольному сферическому треугольнику на гелиоцентрической небесной сфере (рис. 10), образованному эклиптикой NQ, орбитой NP и кругом широт PQ, проходящим через положение планеты P.

Так как $l = \Upsilon Q$, $b = QP$, то

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u, \tag{9.5}$$

$$\sin b = \sin i \sin u. \tag{9.6}$$

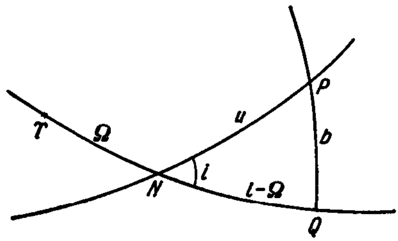

Рис. 10.

Уравнение (9.5) имеет вид

$$\operatorname{tg} Y = \mu \operatorname{tg} X \qquad (\mu > 0). \tag{9.7}$$

Такие уравнения решаются при помощи следующей формулы:

$$Y = X + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{h} \beta^h \sin 2hX, \tag{9.8}$$

где

$$\beta = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

В рассматриваемом случае

$$\beta = \frac{\cos i - 1}{\cos i + 1} = -\operatorname{tg}^2 \frac{i}{2},$$

следовательно,

$$l - \Omega = u - \frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \cdot \sin 2u + \frac{1}{2 \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \cdot \sin 4u - \ldots$$

Разность между гелиоцентрической долготой l и долготой в орбите w называется **приведением к эклиптике**. Обозначая эту величину через R, получим

$$l = w + R,$$

где, учитывая (9.2),

$$R = -\frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2u + \frac{1}{2 \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4u - \ldots,$$

$$u = w - \Omega.$$

Для каждой большой планеты составлена таблица, дающая R по аргументу u при некотором среднем значении i, а также изменения R, соответствующие вековым изменениям i.

Другая таблица, вычисленная непосредственно по формуле (9.6), дает широту b по аргумеиту u. Таблицы такого рода и послужили основанием к тому, чтобы назвать величину u аргументом широты.

Примечание. Чтобы получить разложение (9.8), можно поступить следующим образом.

Положим

$$x = \exp iX, \quad y = \exp iY,$$

тогда уравнение (9.7) примет вид

$$\frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = \mu \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Следовательно,

$$y^2 = \frac{1 - \mu + (1 + \mu) x^2}{1 + \mu + (1 - \mu) x^2} = x^2 \frac{1 - \beta x^{-2}}{1 - \beta x^2},$$

или, после логарифмирования,

$$Y = X + \frac{1}{2i} \ln(1 - \beta x^{-2}) - \frac{1}{2i} (1 - \beta x^2).$$

Так как $|\beta| < 1$, то после разложения логарифмов в ряды получим формулу (9.8).