ГЛАВА V

НАХОЖДЕНИЕ ОРБИТЫ ПО НАЧАЛЬНЫМ ИЛИ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Вычисление орбиты по положению и скорости в начальный момент. Первый способ

Невозмущенное движение светила в общем случае определяется шестью элементами орбиты:

$$a,\ e,\ M_0,\ \Omega,\ i,\ \omega. \tag{1.1}$$

Вместо трех последних элементов при вычислении эфемериды обычно пользуются (§ 5 гл. IV) векторными элементами $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, или эквивалентными им величинами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

С другой стороны, движение материальной точки вполне определяется заданием ее положения и скорости для какого-либо момента времени. Таким образом, как элементы (1.1) однозначно определяют величины

$$x_0,\ y_0,\ z_0;\quad \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0 \tag{1.2}$$

для момента t_0, так и, обратно, задание величин (1.2) однозначно определяет элементы (1.1).

Для нахождения элементов орбиты по величинам (1.2) нужно, очевидно, воспользоваться первыми интегралами задачи двух тел, подробно изученными в гл. III. Для сокращения письма величину

$$\varkappa = k\sqrt{1+m},$$

фигурирующую в этих интегралах, мы заменим везде через k. Если масса m заметно отличается от нуля и должна быть учтена, то восстановление в полученных формулах опущенного множителя $\sqrt{1+m}$ не представит труда.

Чтобы внести полную определенность и получить формулы в наиболее удобном для практических приложений виде, будем считать, что величины (1.2) даны в экваториальной системе координат.

Формулы

$$\left.\begin{aligned} &r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \quad V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2, \\ &r_0\dot{r}_0 = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

позволяют найти радиус-вектор, квадрат скорости и радиальную скорость. После этого интеграл энергии, представленный в форме

$$1/a = 2/r_0 - k^{-2}V_0^2; \quad k^{-2} = 3379{,}3807, \tag{1.4}$$

даст большую полуось орбиты.

Дифференцирование уравнения Кеплера дает

$$\dot{E} = k/r\sqrt{a}, \tag{1.5}$$

вследствие чего из соотношений

$$r = a(1 - e\cos E),$$

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2}\sin E,$$

имеем

$$r\dot{r} = k\sqrt{a}\; e\sin E, \tag{1.6}$$

$$V^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = a(1 - e^2\cos^2 E)k^2r^{-2} = k^2r^{-1}(1 + e\cos E).$$

Положив здесь $t = t_0$, получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &e\sin E_0 = k^{-1}r_0\dot{r}_0/\sqrt{a}; \quad k^{-1} = 58{,}132441, \\ &e\cos E_0 = 1 - a/r_0 = k^{-2}V_0^2r_0 - 1, \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

позволяющие найти e и E_0.

Для контроля может служить соотношение

$$a(1 - e^2) = k^{-2}\left[r_0^2V_0^2 - (r_0\dot{r}_0)^2\right].$$

Для вычисления третьего из элементов (1.1) служит уравнение Кеплера:

$$M_0 = E_0 - e\sin E_0.$$

Чтобы найти векторные элементы, обратимся к формулам (5.10) гл. IV, выражающим гелиоцентрические экваториальные координаты через эксцентрическую аномалию. Эти формулы дают, при помощи (1.5),

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = A_x(\cos E_0 - e) + B_x\sin E_0, \\ &\dot{x}_0 = (-A_x\sin E_0 + B_x\cos E_0)\,k/r_0\sqrt{a}. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Отсюда найдем A_x и B_x. Перестановка букв даст остальные компоненты этих векторов. Таким образом, получим следующие рабочие формулы:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= Kx_0 - L\dot{x}_0; \quad B_x = Mx_0 + N\dot{x}_0,\\ A_y &= Ky_0 - L\dot{y}_0; \quad B_y = My_0 + N\dot{y}_0,\\ A_z &= Kz_0 - L\dot{z}_0; \quad B_z = Mz_0 + N\dot{z}_0,\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

где

$$K = ar_0^{-1}\cos E_0; \qquad M = ar_0^{-1}\sin E_0,$$

$$L = k^{-1}a^{3/2}\sin E_0; \quad N = k^{-1}a^{3/2}(\cos E_0 - e).$$

Контроль:

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = a^2; \quad B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = a^2(1 - e^2),$$
$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0.$$

Вычисление векторных элементов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ заканчивается по формулам

$$\left.\begin{aligned} b &= a\sqrt{1 - e^2},\\ P_x &= a^{-1}A_x; \ \ldots,\\ Q_x &= b^{-1}B_x; \ \ldots\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Для получения эклиптических элементов i, Ω, ω надо обратиться к соотношениям (5.11) гл. IV, которые дают

$$\left.\begin{aligned} \sin i\sin\omega &= P_z\cos\varepsilon - P_y\sin\varepsilon,\\ \sin i\cos\omega &= Q_z\cos\varepsilon - Q_y\sin\varepsilon,\\ \sin\Omega &= (P_y\cos\omega - Q_y\sin\omega)\sec\varepsilon,\\ \cos\Omega &= P_x\cos\omega - Q_x\sin\omega.\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Контроль:

$$P_x\sin\omega + Q_x\cos\omega = -\cos i\sin\Omega.$$

Если формула (1.4) дала $1/a = 0$, то движение происходит по параболе.

Дифференцирование формул параболического движения

$$r = q(1 + \sigma^2); \quad \sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = \frac{k}{\sqrt{2}}\frac{t - T}{q^{3/2}}$$

дает

$$r\dot{r} = k\sqrt{2q}\,\sigma.$$

Таким образом, для момента t_0 имеем

$$\sigma_0 = \operatorname{tg}\frac{v_0}{2} = \frac{r_0\dot{r}_0}{k\sqrt{2q}}, \tag{1.12}$$

что дает возможность при помощи соотношений

$$B = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\sigma_0 + \frac{1}{3}\sigma_0^3\right); \quad T = t_0 - q^{3/2}B, \tag{1.13}$$

найти момент прохождения через перигелий. Величина B может быть также найдена при помощи таблицы V.

Если формула (1.4) дала $a<0$, то движение происходит по гиперболе. В этом случае в указанные выше формулы для эллиптического движения нужно внести изменения в соответствии с тем, что было сказано в § 6 гл. III.

§ 2. Вычисление орбиты по положению и скорости в начальный момент. Второй способ

После того как по формулам (1.3) и (1.4) предыдущего параграфа найдена большая полуось орбиты, обращаемся к интегралам площадей, выражаемым соотношениями (3.4) гл. III. Применив эти соотношения к моменту $t=t_0$ и написав их для экваториальной системы координат, получим

$$\left.\begin{aligned} k\sqrt{p}\sin i'\sin\Omega' &= y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0, \\ k\sqrt{p}\sin i'\cos\Omega' &= x_0\dot{z}_0 - z_0\dot{x}_0, \\ k\sqrt{p}\cos i' &= x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Эти уравнения однозначно определяют параметр p и элементы i', Ω', фиксирующие положение плоскости орбиты.

Соотношение

$$p = a(1-e^2) \tag{2.2}$$

дает эксцентриситет, однако оно мало пригодно в тех случаях, когда эксцентриситет невелик.

Уравнение орбиты (4.3) гл. III напишем в таком виде:

$$e\cos v = pr^{-1} - 1 \tag{2.3}$$

и продифференцируем. Это даст

$$e\sin v\dot{v} = p\dot{r}r^{-2},$$

откуда, пользуясь интегралом площадей

$$r^2\dot{v} = k\sqrt{p},$$

получим

$$e\sin v = k^{-1}\sqrt{p}\,\dot{r}. \tag{2.4}$$