что дает возможность при помощи соотношений

$$B = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\sigma_0 + \frac{1}{3}\sigma_0^3\right); \quad T = t_0 - q^{3/2}B, \tag{1.13}$$

найти момент прохождения через перигелий. Величина B может быть также найдена при помощи таблицы V.

Если формула (1.4) дала $a<0$, то движение происходит по гиперболе. В этом случае в указанные выше формулы для эллиптического движения нужно внести изменения в соответствии с тем, что было сказано в § 6 гл. III.

§ 2. Вычисление орбиты по положению и скорости в начальный момент. Второй способ

После того как по формулам (1.3) и (1.4) предыдущего параграфа найдена большая полуось орбиты, обращаемся к интегралам площадей, выражаемым соотношениями (3.4) гл. III. Применив эти соотношения к моменту $t=t_0$ и написав их для экваториальной системы координат, получим

$$\left.\begin{aligned} k\sqrt{p}\sin i'\sin\Omega' &= y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0, \\ k\sqrt{p}\sin i'\cos\Omega' &= x_0\dot{z}_0 - z_0\dot{x}_0, \\ k\sqrt{p}\cos i' &= x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Эти уравнения однозначно определяют параметр p и элементы i', Ω', фиксирующие положение плоскости орбиты.

Соотношение

$$p = a(1-e^2) \tag{2.2}$$

дает эксцентриситет, однако оно мало пригодно в тех случаях, когда эксцентриситет невелик.

Уравнение орбиты (4.3) гл. III напишем в таком виде:

$$e\cos v = pr^{-1} - 1 \tag{2.3}$$

и продифференцируем. Это даст

$$e\sin v\dot{v} = p\dot{r}r^{-2},$$

откуда, пользуясь интегралом площадей

$$r^2\dot{v} = k\sqrt{p},$$

получим

$$e\sin v = k^{-1}\sqrt{p}\,\dot{r}. \tag{2.4}$$

Применив соотношения (2.3) и (2.4) к моменту $t=t_0$, получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} r_0 e\sin v_0 &= k^{-1}\sqrt{p}\, r_0\dot{r}_0; \quad k^{-1}=58{,}132441,\\ r_0 e\cos v_0 &= p-r_0; \quad r_0\dot{r}_0 = x_0\dot{x}_0+y_0\dot{y}_0+z_0\dot{z}_0, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

дающие возможность найти e и v_0. Для контроля можно воспользоваться соотношением (2.2).

Обратимся теперь к выражениям прямоугольных гелиоцентрических координат через истинную аномалию, даваемым формулами (3.7) гл. III. Применив их к моменту $t=t_0$, получим

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= r_0(\cos u_0'\cos\Omega' - \sin u_0'\sin\Omega'\cos i'),\\ y_0 &= r_0(\cos u_0'\sin\Omega' + \sin u_0'\cos\Omega'\cos i'),\\ z_0 &= r_0\sin u_0'\sin i', \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где $u_0'=v_0+\omega'$.

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} r_0\sin u_0' &= (y_0\cos\Omega' - x_0\sin\Omega')\sec i' = z_0\operatorname{cosec} i',\\ r_0\cos u_0' &= x_0\cos\Omega' + y_0\sin\Omega', \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

что позволяет найти u_0', а следовательно, и

$$\omega' = u_0' - v_0. \tag{2.8}$$

Остается вычислить последний элемент — время прохождения через перигелий T (или среднюю аномалию эпохи M_0). Этот элемент находится различно в зависимости от вида орбиты.

Для эллиптической орбиты с не очень большим эксцентриситетом находим эксцентрическую аномалию E_0, а по ней — среднюю аномалию M_0. Для этого служат формулы

$$\operatorname{tg}\frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}; \quad M_0 = E_0 - e\sin E_0.$$

Среднее суточное движение n и время прохождения через перигелий T, представляющее интерес для комет, вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} n &= ka^{-3/2}; & T &= t_0 - M_0/n,\\ k^\circ &= 0^\circ{,}98560767; & k'' &= 3548''{,}1876. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Для малых планет, для которых принято выражать n в секундах дуги, можно воспользоваться таблицей III.

В случае параболической орбиты, т. е. когда интеграл энергии дал $a=\infty$, имеем

$$e=1; \quad q=\frac{1}{2}p.$$

В этом случае уравнения (2.5) целесообразно заменить такими:

$$\left.\begin{aligned} r_0\dot{r}_0 &= x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0; \qquad \sigma_0 = \operatorname{tg}\frac{v_0}{2} = \frac{r_0\dot{r}_0}{k\sqrt{2q}},\\ B &= \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\sigma_0 + \frac{1}{3}\sigma_0^3\right); \qquad T = t_0 - q^{3/2}B, \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{k} = 82{,}21168629,$$

дающими как истинную аномалию v_0, так и время прохождения через перигелий T. Вычисления облегчаются применением таблицы V.

Для эллиптических и гиперболических орбит, имеющих эксцентриситеты, близкие к единице (примерно для $0{,}90 < e < 1{,}15$), применяется способ, изложенный в § 4 гл. IV. В случае гиперболических орбит с более значительными эксцентриситетами, если бы таковые встретились, можно применить формулы, указанные в § 6 гл. III.

Найденные в этом параграфе экваториальные элементы i', Ω', ω' могут непосредственно употребляться для вычисления эфемериды при помощи формул (2.6). Но иногда предпочитают приводить эти формулы к логарифмическому виду путем введения постоянных Гаусса.

Полагая (§ 6, гл. IV)

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin A' &= \cos\Omega',\\ \sin a \cos A' &= -\sin\Omega' \cos i',\\ \sin b \sin B' &= \sin\Omega',\\ \sin b \cos B' &= \cos\Omega' \cos i',\\ c = i'&; \quad C' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

получим

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin a \sin(A' + \omega' + v),\\ y &= r \sin b \sin(B' + \omega' + v),\\ z &= r \sin c \sin(C' + \omega' + v). \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Примечание. Легко получить формулы, дающие непосредственно постоянные

$$a, \ldots; \ A_1 = A' + \omega' = A + \omega, \ldots, \tag{2.13}$$

минуя вычисление экваториальных элементов. В самом деле, дифференцирование первого из выражений (2.12) дает

$$\dot{x} = \dot{r} \sin a \sin(A_1 + v) + r \sin a \cos(A_1 + v)\,\dot{v},$$

или

$$\dot{x} - x\dot{r}r^{-1} = k\sqrt{p}\, r^{-1} \sin a \cos(A_1 + v),$$

так как согласно интегралу площадей

$$r^2\dot{v} = k\sqrt{p}.$$

Применив эти соотношения, так же как формулы (2.12), к моменту $t=t_0$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin(A_1+v_0) &= x_0 r_0^{-1}, \\ \sin a \cos(A_1+v_0) &= (\dot{x}_0 r_0 - x_0 \dot{r}_0)/k\sqrt{p}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

и аналогичные уравнения для двух других координат. Решение этих уравнений попарно даст величины (2.13).

§ 3. Вычисление орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру. Первый способ

В двух предыдущих параграфах была рассмотрена задача нахождения орбиты по начальным условиям. Теперь мы обратимся к задаче нахождения орбиты по граничным условиям, заключающейся в следующем:

Даны два гелиоцентрических положения светила, определяемых (в экваториальной системе координат) векторами

$$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\} \qquad (3.1)$$

и соответствующих заданным моментам t_1 и t_2. Требуется найти элементы орбиты.

Эта задача значительно сложнее предыдущей, и ее решение мы разделим на несколько частей. Начнем с того, что решим ее при дополнительном условии: предположим, что параметр орбиты p нам уже известен.

В дальнейшем будем всегда считать, что $t_1 < t_2$ и что разность истинных аномалий v_2 и v_1, соответствующих положениям (3.1), не превосходит 90°. Таким образом, обозначив угол между векторами (3.1) через

$$2f = v_2 - v_1, \qquad (3.2)$$

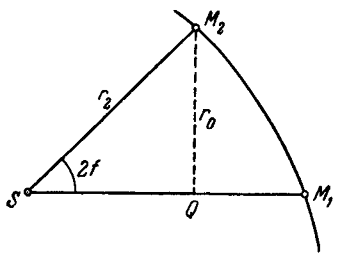

Рис. 11

будем иметь $0° < 2f < 90°$. Такое ограничение вполне соответствует характеру астрономических приложений рассматриваемой задачи. При этом условии задача имеет, как будет ясно из дальнейшего, решение и притом единственное. Если же $2f > 90°$, то задача имеет более чем одно решение.

Чтобы найти угол $2f$, играющий весьма важную роль в дальнейшем, можно употребить следующий прием.

Пусть (рис. 11) M_1 и M_2 — положения светила, определяемые векторами (3.1). Из точки M_2 опустим перпендикуляр M_2Q на