Применив эти соотношения, так же как формулы (2.12), к моменту $t=t_0$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin (A_1 + v_0) &= x_0 r_0^{-1}, \\ \sin a \cos (A_1 + v_0) &= (\dot{x}_0 r_0 - x_0 \dot{r}_0)/k\sqrt{p}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

и аналогичные уравнения для двух других координат. Решение этих уравнений попарно даст величины (2.13).

§ 3. Вычисление орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру. Первый способ

В двух предыдущих параграфах была рассмотрена задача нахождения орбиты по начальным условиям. Теперь мы обратимся к задаче нахождения орбиты по граничным условиям, заключающейся в следующем:

Даны два гелиоцентрических положения светила, определяемых (в экваториальной системе координат) векторами

$$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\} \qquad (3.1)$$

и соответствующих заданным моментам t_1 и t_2. Требуется найти элементы орбиты.

Эта задача значительно сложнее предыдущей, и ее решение мы разделим на несколько частей. Начнем с того, что решим ее при дополнительном условии: предположим, что параметр орбиты p нам уже известен.

В дальнейшем будем всегда считать, что $t_1 < t_2$ и что разность истинных аномалий v_2 и v_1, соответствующих положениям (3.1), не превосходит 90°. Таким образом, обозначив угол между векторами (3.1) через

$$2f = v_2 - v_1, \qquad (3.2)$$

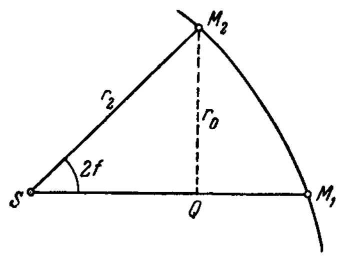

Рис. 11

будем иметь $0° < 2f < 90°$. Такое ограничение вполне соответствует характеру астрономических приложений рассматриваемой задачи. При этом условии задача имеет, как будет ясно из дальнейшего, решение и притом единственное. Если же $2f > 90°$, то задача имеет более чем одно решение.

Чтобы найти угол $2f$, играющий весьма важную роль в дальнейшем, можно употребить следующий прием.

Пусть (рис. 11) M_1 и M_2 — положения светила, определяемые векторами (3.1). Из точки M_2 опустим перпендикуляр M_2Q на вектор SM_1 и положим

$$\sigma = \frac{SQ}{SM_1} = \frac{r_2 \cos 2f}{r_1}. \tag{3.3}$$

Так как

$$r_1 r_2 \cos 2f = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

то

$$\sigma = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^2}. \tag{3.4}$$

Введем, далее, вспомогательный вектор $\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, компоненты которого определяются равенствами

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1; \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1; \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1. \tag{3.5}$$

Равенство (3.3) показывает, что

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_2 - \sigma \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 - \overrightarrow{SQ},$$

поэтому

$$r_0 = QM_2 = r_2 \sin 2f. \tag{3.6}$$

Чтобы получить угол $2f$, нужно, следовательно, выполнить такие операции: по формулам (3.4) и (3.5) найти x_0, y_0, z_0; по формуле

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

вычислить r_0; при помощи соотношения (3.6) найти $2f$.

Для контроля проделанных вычислений можно употребить следующую, правда, несколько громоздкую, формулу:

$$(r_1 r_0)^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Она является следствием очевидного равенства

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2.$$

Отметим также следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} 2f = \frac{r_0 r_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2},$$

которое может иногда оказаться полезным.

Зная угол $2f$ и параметр p, легко найти каждую из истинных аномалий v_1 и v_2. В самом деле, уравнение орбиты

$$r = p/(1 + e \cos v),$$

будучи применено к моментам t_1 и t_2, дает

$$e \cos v_1 = q_1; \quad e \cos v_2 = q_2,$$

где для краткости положено

$$q_1 = p r_1^{-1} - 1; \quad q_2 = p r_2^{-1} - 1.$$

Второе из этих соотношений можно представить, учитывая (3.2), следующим образом:

$$e \cos(v_1 + 2f) = q_2,$$

или

$$q_1 \cos 2f - e \sin v_1 \sin 2f = q_2.$$

Это дает уравнения

$$e \sin v_1 = q_1 \operatorname{ctg} 2f - q_2 \operatorname{cosec} 2f; \quad e \cos v_1 = q_1, \tag{3.7}$$

позволяющие найти e и v_1. Равенство (3.2) дает v_2.

Обратимся теперь к вычислению векторных элементов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$.

Применив формулу (5.8) гл. IV к моментам t_1 и t_2, получим

$$x_1 = P_x r_1 \cos v_1 + Q_x r_1 \sin v_1; \quad x_2 = P_x r_2 \cos v_2 + Q_x r_2 \sin v_2$$

и аналогичные соотношения для двух других координат.

Отсюда находим, учитывая равенство (3.2),

$$P_x = \frac{x_1 r_2 \sin v_2 - x_2 r_1 \sin v_1}{r_1 r_2 \sin 2f};$$

$$Q_x = \frac{x_2 r_1 \cos v_1 - x_1 r_2 \cos v_2}{r_1 r_2 \sin 2f}.$$

Эти формулы уже решают поставленную задачу. Но их можно заменить другими, гораздо более удобными. Так как

$$\sin v_2 = \cos v_1 \sin 2f + \sin v_1 \cos 2f,$$

$$\cos v_2 = \cos v_1 \cos 2f - \sin v_1 \sin 2f,$$

то полученные выражения можно написать, если учесть (3.3) и (3.5), следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
P_x &= \frac{x_1}{r_1} \cos v_1 - \frac{x_0}{r_0} \sin v_1; & Q_x &= \frac{x_1}{r_1} \sin v_1 + \frac{x_0}{r_0} \cos v_1, \\
P_y &= \frac{y_1}{r_1} \cos v_1 - \frac{y_0}{r_0} \sin v_1; & Q_y &= \frac{y_1}{r_1} \sin v_1 + \frac{y_0}{r_0} \cos v_1, \\
P_z &= \frac{z_1}{r_1} \cos v_1 - \frac{z_0}{r_0} \sin v_1; & Q_z &= \frac{z_1}{r_1} \sin v_1 + \frac{z_0}{r_0} \cos v_1.
\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Для перехода от векторных элементов к эклиптическим элементам i, Ω, ω служат формулы (1.11).

Последний этап заключается в нахождении элементов a и M_0 или им эквивалентных.

Предположим сначала, что решение уравнений (3.7) дало для эксцентриситета значение, не превосходящее 0,9. В этом случае по формулам

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_1=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1;\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}E_2=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_2 \tag{3.9}$$

находим эксцентрические аномалии E_1 и E_2.

Иногда полагают $e=\sin\varphi$ и вычисляют E_1 по одной из формул:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_1=\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\varphi\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1;$$

$$\sin\frac{1}{2}(v_1-E_1)=\sqrt{\frac{r_1}{p}}\sin\frac{1}{2}\varphi\sin v_1.$$

Для E_2 применяются аналогичные формулы.

Уравнение Кеплера дает соответствующие средние аномалии:

$$M_1=E_1-e\sin E_1;\quad M_2=E_2-e\sin E_2. \tag{3.10}$$

Это позволяет найти среднее суточное движение и среднюю аномалию эпохи:

$$n=(M_2-M_1)/(t_2-t_1);\quad M_0=M_1+n(t_0-t_1). \tag{3.11}$$

Для комет обычно вычисляется, вместо M_0, время прохождения через перигелий:

$$T=t_1-M_1/n=t_2-M_2/n. \tag{3.12}$$

Вычисление большой полуоси может быть выполнено двояко. С одной стороны, после нахождения e из уравнений (3.7) можно сразу воспользоваться соотношением

$$a=p/(1-e^2)=p\sec^2\varphi. \tag{3.13}$$

С другой стороны, воспользовавшись величиной n, полученной из (3.10) и (3.11), имеем

$$a=(k/n)^{2/3}. \tag{3.14}$$

Равенство величин (3.13) и (3.14) является не только контролем проделанных вычислений, но и свидетельством правильности значения p, положенного в основу этих вычислений. Первые попытки вычисления эллиптических орбит производились именно путем подбора такого значения p, при котором величины (3.13) и (3.14) совпадают.

Случай, когда эксцентриситет орбиты равен единице, будет рассмотрен в § 5. Может еще встретиться случай, когда эксцентриситет настолько близок к единице, что пользоваться эксцентрической аномалией (или величиной H, заменяющей ее в гиперболическом движении) становится неудобно или даже невозможно. В этом случае, после решения уравнений (3.7), вычисляем

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1-e); \quad \operatorname{tg} v_1; \quad \operatorname{tg} v_2.$$

Формулы (§ 4, гл. IV)

$$\operatorname{tg} v = \eta'\xi = k^2 U(\varepsilon)\, U(\zeta)\, \sigma (1-\sigma^2)^{-1},$$

$$\zeta = \varepsilon\sigma^2; \quad B = \sigma U(\zeta) + \sigma^3 V(\zeta)$$

дают возможность найти величины

$$B_1 = q^{-3/2}(t_1 - T); \quad B_2 = q^{-3/2}(t_2 - T) \tag{3.15}$$

при помощи немногих, быстро сходящихся приближений.

Отсюда

$$q^{-3/2} = (B_2 - B_1)/(t_2 - t_1), \tag{3.16}$$

$$T = t_1 - q^{3/2} B_1 = t_2 - q^{3/2} B_2. \tag{3.17}$$

Согласие величины (3.16), вытекающей из закона площадей, с величиной

$$q = p/(1+e),$$

даваемой геометрическими соображениями, служит контролем вычислений и гарантией правильности принятого значения параметра p.

§ 4. Вычисление орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру. Второй способ

Задача заключается в нахождении элементов орбиты, если известны положения светила

$$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$$

в моменты t_1 и t_2 и параметр p.

Решение задачи, изложенное в предыдущем параграфе, чаще всего употребляется в практике нахождения орбит по наблюдениям. Но иногда может оказаться более удобным следующее решение, дающее сразу элементы, определяющие положение плоскости орбиты.

Полагая опять, что $t_1 < t_2$ и что угол $2f = v_2 - v_1 < 90°$, рассмотрим векторное произведение $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$, абсолютную величину которого будем обозначать через

$$[r_1 r_2] = r_1 r_2 \sin 2f. \tag{4.1}$$

Компоненты этого произведения по осям координат равны

$$[r_1 r_2] R_x; \quad [r_1 r_2] R_y; \quad [r_1 r_2] R_z,$$