§ 5. Нахождение параболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям

При вычислении орбиты вновь открытой кометы обычно принимают, что комета движется по параболе. В этом случае найденные из наблюдений гелиоцентрические положения кометы

$$\boldsymbol{r}_1(x_1, y_1, z_1), \quad \boldsymbol{r}_2(x_2, y_2, z_2)$$

в моменты t_1 и t_2 таковы, что соответствующая им орбита есть параболическая. Зная это заранее, можно и без предварительного нахождения параметра найти все элементы орбиты.

В самом деле, после того как по формулам (3.4)—(3.6) или по формулам (4.1), (4.2) найдем угол $2f = v_2 - v_1$, обратимся к уравнению параболы, которое дает:

$$r_1 = q\sec^2\frac{v_1}{2}, \quad r_2 = q\sec^2\frac{v_2}{2}.$$

Эти равенства можно представить так:

$$\sqrt{\frac{r_1}{q}}\cos\frac{v_1}{2} = 1; \quad \sqrt{\frac{r_2}{q}}\cos\frac{v_2}{2} = 1,$$

или

$$\sqrt{\frac{r_1}{q}}\sin\frac{v_1}{2} = \operatorname{ctg} f - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\operatorname{cosec} f; \quad \sqrt{\frac{r_1}{q}}\cos\frac{v_1}{2} = 1. \tag{5.1}$$

Отсюда можно найти как истинные аномалии v_1 и $v_2 = v_1 + 2f$, так и перигельное расстояние q.

Если угол $2f$ вычислялся по формулам (4.1) и (4.2), что попутно дало элементы i' и Ω', то, применив (4.5), найдем ω'. Чтобы закончить вычисление элементов, остается найти момент прохождения через перигелий T. Для этого служат обычные формулы параболического движения:

$$\sigma_1 = \operatorname{tg}\frac{v_1}{2}; \quad B_1 = \sigma_1 + \frac{1}{3}\sigma_1^3; \quad T = t_1 - q^{3/2}B_1.$$

Вычисление T, исходя из v_2, служит хорошим контролем. Переход от σ_1 и σ_2 к B_1 и B_2 выполняется при помощи таблицы V.

В том случае, когда предпочитают иметь дело с векторными элементами, их находят по формулам, указанным в § 3.

После этого величины

$$\left.\begin{aligned} m_x &= qP_x; & m_y &= qP_y; & m_z &= qP_z, \\ n_x &= 2qQ_x; & n_y &= 2qQ_y; & n_z &= 2qQ_z \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

дают возможность пользоваться при вычислении эфемериды формулами

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_x & n_x \\ m_y & n_y \\ m_z & n_z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1-\sigma^2 \\ \sigma \end{Vmatrix}. \tag{5.3}$$

Соотношения

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = q^2; \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 4q^2,$$
$$m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z = 0$$

могут служить для контроля величин (5.2).

§ 6. Метод Гаусса для нахождения параметра орбиты

В предыдущих параграфах было показано, что вычисление всех элементов орбиты по двум заданным гелиоцентрическим положениям светила выполняется очень просто, если параметр орбиты уже известен. Задача нахождения параметра, имеющая, таким образом, здесь основное значение, впервые полностью была решена Гауссом [1809]. Данный им метод и по настоящее время остается основным. Он применяется во всех случаях, когда различного рода приближенные методы становятся недостаточными.

Стоящая перед нами задача заключается в нахождении параметра p по двум положениям светила

$$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}; \quad \boldsymbol{r}_2 = \{x_2,\ y_2,\ z_2\} \tag{6.1}$$

в моменты t_1 и t_2. Она приводится, как мы скоро увидим, к решению системы трансцендентных уравнений, что может быть выполнено лишь путем последовательных приближений. Чтобы сделать проведение этих последовательных приближений возможно более удобным, Гаусс выразил p через вспомогательную неизвестную η, равную отношению площади сектора орбиты, заключенного между векторами (6.1), к площади треугольника, образованного этими векторами и хордой. Таким образом,

$$\eta = \frac{k\sqrt{p}\,(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin 2f}, \tag{6.2}$$

где, как и раньше, через $2f = v_2 - v_1$ обозначен угол между векторами (6.1).

Эта формула показывает, что вычисление p приводится к вычислению η, и наоборот. Заметим, что введение η вместо p целесообразно еще и потому, что эта величина сама по себе используется при нахождении орбит из наблюдений, как это будет показано в гл. VIII.